

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES ROYER

MARC YOR

**Représentation intégrale de certaines mesures
quasi-invariantes sur $C(\mathbf{R})$; mesures extrémales
et propriété de Markov**

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 2 (1976), p. 7-24

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_7_0

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION INTÉGRALE
DE CERTAINES MESURES
QUASI-INVARIANTES SUR $\mathcal{C}(\mathbf{R})$;
MESURES EXTRÉMALES
ET PROPRIÉTÉ DE MARKOV

par G. ROYER et M. YOR ⁽¹⁾

Introduction.

A la suite de l'article [4] de P. Courrège et P. Renouard ainsi que des travaux de P. Priouret et des auteurs (cf [12], [13], [16]), on s'intéresse ici à certaines mesures sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ ⁽²⁾ qui sont quasi-invariantes sous les translations de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ⁽²⁾; de façon précise soit P un polynôme non constant borné inférieurement sur \mathbf{R} et $a(f, \omega)$ la fonction sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \times \mathcal{C}(\mathbf{R})$ donnée par :

$$a(f, \omega) = \exp \int_{\mathbf{R}} \left[(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)) f''(t) - P(\omega(t)) + f(t) + P(\omega(t)) \right] dt,$$

on s'attache à l'étude du cône C de toutes les mesures μ positives bornées sur la tribu borélienne de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ qui satisfont :

$$(Q) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \quad \mu(f + d\omega) = a(f, \omega) \mu(d\omega)$$

(on dit que $a(f, \omega)$ est une version du module de quasi-inva-

⁽¹⁾ Équipes de recherche associées au C.N.R.S. n° 1 et 294.

⁽²⁾ $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ (resp. : $\mathcal{D}(\mathbf{R})$) désigne l'espace des fonctions réelles continues sur \mathbf{R} (resp. : indéfiniment dérivables à support compact. On munit $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

riance de μ). On établira les deux résultats principaux suivants :

1° toute mesure de C est intégrale de mesures appartenant aux génératrices extrémales de C ;

2° toute mesure μ , élément d'une génératrice extrémale de C , est markovienne, au sens suivant : si pour $t \in \mathbf{R}$ on désigne par X_t la fonction sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ définie par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et si \mathcal{F}_t^- est la tribu engendrée par les $X_s, s \leq t$, le processus $(\mu/\mu(1), \mathcal{F}_t^-, X_t)$ vérifie la propriété de Markov.

On rappelle que le caractère markovien d'une mesure quasi-invariante et le caractère local de son module de quasi-invariance sont liés (voir [4], n° 6,4).

0. Préliminaires et rappels.

Dans [4] ou [12] est construit un élément du cône C que l'on notera $\underline{\mu}$ et dont les propriétés suivantes seront utilisées par la suite :

1° $\underline{\mu}$ est une probabilité euclidienne, ce qui signifie que $\underline{\mu}$ est invariante par tout isomorphisme T_σ de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ induit par une translation ou une symétrie σ de $\mathbf{R}([T_\sigma(\omega)](t) = \omega(\sigma(t)))$;

2° μ_0 , loi commune des variables $X_t, t \in \mathbf{R}$, est donnée par $\mu_0(dx) = \rho(x) dx$ avec $\rho = \exp - 2\hat{\zeta}$, où $\hat{\zeta}$ désigne une primitive convenable de la fonction ζ déterminée en fonction du polynôme P par $\zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = P'$ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. (cf. [4] n° 1,5 ou [12] n° 2,1).

3° $\underline{\mu}$ est la loi d'un processus de diffusion stationnaire, de générateur infinitésimal L donné par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \quad L(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi'' - \zeta \cdot \varphi'.$$

La mesure $\underline{\mu}$ est donc markovienne et admet un semi-groupe de transition $P_t(x, dy)$. De plus pour $t > 0$ on a

$$P_t(x, dy) = p_t(x, y) dy,$$

la fonction $p_t(x, y)$ ayant les propriétés suivantes :

PROPOSITION 0.1. — 1° $p_t(x, y)$ est indéfiniment dérivable et satisfait aux équations :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_x\right)p = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_y^*\right)p = 0$$

avec :

$$L^*\varphi = \frac{1}{2} \varphi'' + (\zeta\varphi)'$$

2° p_t satisfait à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\forall x \forall y \in \mathbf{R} \quad p_{t+s}(x, y) = \int_{\mathbf{R}} p_t(x, z)p_s(z, y) dz.$$

La propriété 1) reprend le théorème 2 de [12] et la propriété 2) sera établie en 3.3.

Notations 0.2. — Étant donnés $s < t$ on note $\mathcal{F}_{s,t}$ (resp. \mathcal{F}_t^+) la tribu sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ engendrée par les X_u , $s \leq u \leq t$ (resp. : $u \geq t$); $\mu_{[s,t]}$ désigne l'image par l'application canonique : $\mathcal{C}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}([s, t])$ d'une mesure μ sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$; enfin $\mu_{\{s,t\}}$ est la mesure sur \mathbf{R}^2 image de μ par l'application (X_s, X_t) ; on utilisera la propriété suivante :

LEMME 0.3. — La probabilité $\mu_{\{s,t\}}$ admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue qui est strictement positive en tout point de \mathbf{R}^2 .

Démonstration. — On a évidemment

$$\mu_{\{s,t\}}(dx, dy) = p_{t-s}(x, y)\rho(x) dx dy$$

et p_t et ρ sont continues et strictement positives.

Contrairement à l'usage on note $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R} | t > 0\}$, (resp : $\mathbf{R}^-, <$), et on note $L_+(\mathbf{R}^2)$ le cône des classes de fonctions positives et mesurables pour la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 .

DÉFINITION 0.4. — On appelle D le cône des applications $d : \mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \rightarrow L_+(\mathbf{R}^2)$, $(s, t) \mapsto d_{s,t}$ telles que $d_{s,t}(X_s, X_t)$ soit une $(\mu, \mathcal{F}_{s,t})$ martingale intégrable; autrement dit, $d_{s,t}(x, y)$ étant une version quelconque de $d_{s,t}$, on a pour $s_1 \leq s_2 < 0$,

$t_1 \geq t_2 > 0$ et presque tout (x, y) :

$$(\varepsilon) \quad d_{s_2, t_2}(x, y) = \int_{\mathbf{R}^2} d_{s_1, t_1}(u, v) P_{s_2-s_1}(x, du) P_{t_1-t_2}(y, dv)$$

et $\underline{\mu}_{\{s, t\}}(d_{s, t}) < \infty$ (on se limite à $s < 0$ et $t > 0$ par commodité pour la fin de ce travail).

On s'appuiera par la suite sur :

PROPOSITION 0.5. — 1° pour toute mesure $\mu \in \mathbf{C}$, $\underline{\mu}_{[s, t]}$ est équivalente à $\underline{\mu}_{[s, t]}$ et il existe un élément d de \mathbf{D} tel que pour $s < 0, t > 0, \underline{\mu}_{[s, t]} = d_{s, t}(X_s, X_t) \underline{\mu}_{[s, t]}$. L'application

$$\mathcal{J} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$$

ainsi définie est un isomorphisme de cônes.

2° pour que μ soit markovienne il faut et il suffit que $d_{s, t}$ soit décomposée c'est-à-dire qu'il existe des fonctions sur \mathbf{R} , φ_s^+ et φ_t^- telles que :

$$\forall s < 0, t > 0 \text{ pour presque tout } (x, y) \quad d_{s, t}(x, y) = \varphi_s^+(x) \varphi_t^-(y)$$

Démonstration. — 1° L'existence de l'application \mathcal{J} est reprise de [13], prop 11. D'autre part étant donné $d \in \mathbf{D}$ si l'on définit la mesure $\mu^{s, t}$ sur $\mathcal{C}([s, t])$ par

$$\mu^{s, t} = d_{s, t}(X_s, X_t) \underline{\mu}_{[s, t]}$$

l'équation (ε) exprime que le système $\mu^{s, t}$ est projectif (pour les applications canoniques : $\mathcal{C}([s_1, t_1]) \rightarrow \mathcal{C}([s_2, t_2])$ lorsque $s_1 \leq s_2, t_2 \leq t_1$); il provient d'après le théorème de Kolmogorov sur les espaces polonais (cf. [3] n° 4, 3 ou [10], page 79) d'une mesure μ sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ et on a immédiatement $\mu \in \mathbf{C}$, $\mathcal{J}(\mu) = d$.

2° Le caractère nécessaire de cette condition est établi dans [13] et la réciproque est aisée à l'aide du caractère markovien de $\underline{\mu}$ (remarquons que $(\varphi_s^+, \mathcal{F}_s^+)$ et $(\varphi_t^-, \mathcal{F}_t^-)$ sont des martingales).

1. Le cas du champ libre.

Dans ce paragraphe on étudie le cas particulier simple où le polynôme $P(x)$ est $\frac{m^2}{2} x^2$, $m > 0$; c'est le cas du champ

libre en théorie quantique des champs; $\underline{\mu}$ se trouve alors être une mesure gaussienne et on peut calculer explicitement les fonctions ρ et p_i correspondantes (cf. [4] n° 2.6.2. et [16] n° 6.3 pour le lien avec les processus gaussiens); si pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ on désigne par S_x la solution

$$x_1 e^{mt} + x_2 e^{-mt}$$

de l'équation $S'' - m^2 S = 0$, la proposition suivante donne la structure du cône C (cf. [13] prop. 16) :

PROPOSITION 1.1. — *Toute mesure $\mu \in C$ se représente de manière unique sous la forme :*

$$\mu(d\omega) = \int_{\mathbf{R}^2} \underline{\mu}(S_x + d\omega) \alpha(dx),$$

α désignant une mesure ≥ 0 bornée sur \mathbf{R}^2 .

Remarques 1.2. — Ici le module de quasi-invariance vaut

$$a(f, \omega) = \left\langle \omega + \frac{1}{2} f, f'' - m^2 f \right\rangle_{L^2(\mathbf{R})};$$

il se prolonge continûment à $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \times \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et on peut montrer que toute mesure bornée sur $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ qui est $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ -quasi-invariante avec le module $a(f, \omega)$ est portée par $\mathcal{C}(\mathbf{R})$. D'autre part la bijection définie plus haut entre C et $\mathcal{M}_b^+(\mathbf{R}^2)$ est biétreitement continue (voir le paragraphe 2).

On voit qu'ici les résultats annoncés dans l'introduction découlent de la proposition. 1.1 : les génératrices extrémales de C sont formées des mesures $\underline{\mu}(S_x + d\omega)$ qui sont markoviennes, $\underline{\mu}$ l'étant. De plus on peut alors trouver toutes les mesures markoviennes de C .

PROPOSITION 1.3. — *μ est markovienne si et seulement si α est de la forme $\alpha(dx_1, dx_2) = e^{2m\alpha_1 \alpha_2} (dx_1) \alpha_2(dx_2)$, α_1 et α_2 étant des mesures sur \mathbf{R} .*

Démonstration. — La mesure $\underline{\mu}^x = \underline{\mu}(S_x + d\omega)$ étant markovienne, si on pose $d^x = \mathcal{I}(\underline{\mu}^x)$, d^x est décomposée d'après la proposition 0.4; on peut ici à l'aide des formules (2.6.1)

et (1.7.1) de [4] établir que :

$$\begin{aligned} d_{s,t}(y, z) &= \exp - 2mx_1x_2 \psi_t^{-,x}(z)\psi_s^{+,x}(y) \\ \text{où : } \psi_t^{-,x}(y) &= \exp - m(e^{2mt}x_1^2 + 2yx_1e^{mt}) \\ \psi_s^{+,x}(z) &= \exp - m(e^{-2ms}x_2^2 + 2zx_2e^{-ms}) \end{aligned}$$

Soit $d = \mathcal{J}(\mu)$; il est donc clair que si α est de la forme indiquée d est décomposée. Réciproquement supposons d décomposée et posons, s, t , étant fixés :

$$\beta(dx_1, dx_2) = e^{-2m x_1 x_2} \exp - m(x_1^2 e^{2mt} + e^{-2ms} x_2^2) \alpha(dx_1, dx_2);$$

$d_{s,t}$ est (à des coefficients près) la transformée de Laplace de β : $d_{s,t}$ étant un produit tensoriel il en est de même de β d'où le résultat.

2. Représentation intégrale lorsque P est quelconque.

2.0. — Rappelons les éléments de la théorie de la représentation intégrale de G. Choquet qui nous seront utiles pour la suite; soit Γ un cône convexe saillant, réticulé pour son ordre propre et réunion de chapeaux métrisables dans un espace localement convexe; pour tout élément x de Γ il existe une mesure conique maximale unique π sur Γ de résultante x ; de plus pour tout chapeau K de Γ contenant x , π provient d'une probabilité de Radon sur K , portée par les génératrices extrémales de K (Ce théorème est indiqué dans [9], § 11, n° 37; pour le § 3 on utilisera plutôt [5], § 30.)

Étant donné un espace topologique X (complètement régulier) on notera $\mathcal{M}_b^+(X)$ le cône des mesures positives bornées sur la tribu borélienne de $X^{(3)}$, muni de la topologie de la convergence étroite, c'est-à-dire la topologie faible définie par la dualité avec $\mathcal{C}_b(X)$, espace des fonctions continues bornées sur X . On posera $W = \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 2.1. — C est un sous-cône fermé et réticulé de $\mathcal{M}_b^+(W)$; C est métrisable et réunion de ses chapeaux.

(3) Dans les exemples qui suivent X est polonais et donc $\mathcal{M}_b^+(X)$ est composé de mesures de Radon.

Démonstration. — Une mesure μ appartient à C si et seulement si elle vérifie :

$$(Q) \quad \forall F \in \mathcal{C}_b^+(W), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \quad \int_W F(\omega - f) \mu(d\omega) \\ = \int_W a(f, \omega) F(\omega) \mu(d\omega)$$

Montrons que (Q) équivaut à :

$$(Q') \quad \forall F \in \mathcal{C}_b^+(W), \quad \forall f \int a(f, \omega) F(\omega) \mu(d\omega) \\ \leq \int F(\omega - f) \mu(d\omega);$$

pour cela on remarque que $a(f, \omega)$ est une fonction continue de la variable ω qui possède la propriété de cocycle multiplicatif :

$$\forall f_1, f_2, \omega \quad a(f_1 + f_2, \omega) = a(f_1, \omega) a(f_2, \omega + f_1).$$

D'autre part l'inégalité (Q') s'étend, d'après le théorème de Fatou, au cas où F n'est pas supposée bornée; en particulier si on pose

$$F(\omega) = a(-f, \omega + f) \psi(\omega + f), \quad \text{où } \psi \in \mathcal{C}_b^+(W),$$

d'après l'égalité de cocycle, (Q') s'écrit :

$$\int_W \psi(\omega + f) \mu(d\omega) \leq \int a(-f, \omega) \psi(\omega) \mu(d\omega)$$

et donc (Q') implique (Q). Pour montrer que C est fermé il suffit maintenant d'utiliser (Q') en remarquant que l'application :

$$\mu \longmapsto \int_W a(f, \omega) F(\omega) \mu(d\omega) \quad \text{est s.c.i. pour } F \in \mathcal{C}_b^+(W)$$

d'après le théorème de Fatou et la continuité de $a(f, \cdot)$.

b) Soient μ_1 et $\mu_2 \in C$ et $\mu = \mu_1 + \mu_2$. D'après le théorème de Radon-Nikodym on peut écrire $\mu_i = F_i \mu$ $i = 1, 2$ et comme μ_i et μ ont même module de quasi-invariance, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a pour μ -presque tout ω :

$F_i(\omega + f) = F_i(\omega)$; si on pose : $G = \sup(F_1, F_2)$, on a donc aussi presque partout $G(\omega + f) = G(\omega)$; on en déduit que la mesure $G\mu$ est dans C ; c'est la borne supérieure de μ_1 et μ_2 dans $\mathcal{M}_b^+(W)$ et donc aussi pour l'ordre propre de C .

c) C est métrisable; en effet W étant un espace polonais $\mathcal{M}_b^+(W)$ est polonais (cf [3] n° 5-4).

d) C étant fermé dans $\mathcal{M}_b^+(W)$, pour démontrer que C est réunion de ses chapeaux (bien coiffé), il suffit de démontrer que $\mathcal{M}_b^+(W)$ est bien coiffé. La démonstration suivante est indiquée dans [3] exercice 5-10 : soit f une fonction s.c.i. sur W à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}^+}$ qui est bornée inférieurement sur W et telle que pour tout n l'ensemble $f^{-1}([0, n])$ soit compact; alors l'ensemble $K_f = \{\mu \in \mathcal{M}_b^+(W) \mid \mu(f) \leq 1\}$ est un chapeau : en effet K_f est fermé et d'autre part si a est la borne inférieure de f , les mesures de K_f ont leur masse majorée par $\frac{1}{a}$ et sont portées à $\frac{1}{an}$ près par $f^{-1}([0, n])$; donc K_f est compact d'après le critère de Prokhorov (cf. [3], n° 5,5); enfin μ étant donnée on peut former une fonction f telle que $\mu \in K_f$ de la manière suivante : supposant μ de masse 1, soit K_n une suite croissante de compacts de W tels que K_n porte μ à $\frac{1}{2^{2n}}$ près; il suffit de poser :

$$f = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \varphi_n,$$
 où φ_n est la fonction caractéristique du complémentaire de K_n .

Remarque sur la démonstration. — En utilisant (Q') on peut montrer que la quasi-invariance par les translations d'une partie dense de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ avec le module $a(f, \omega)$ implique la quasi-invariance par $\mathcal{D}(\mathbf{R})$; ceci permet d'obtenir des désintégrations de mesures quasi-invariantes en mesures quasi-invariantes de même module (cf. [16]).

Dans le cas où $P(x) = \frac{m^2}{2} x^2$, on a vu que C était isomorphe à $\mathcal{M}_b^+(\mathbf{R}^2)$. Dans le cas général la proposition qui va suivre précise la structure du cône C ; posons $W_{s,t} = \mathcal{C}([s, t])$; on utilisera :

LEMME 2.2. — $\mathcal{M}_b^+(W)$ est la limite projective topologique du système $(\mathcal{M}_b^+(W_{s,t}), r_{s,t}^{s',t'}, r_{s,t}^{s',t'})$, $r_{s,t}^{s',t'}$ désignant l'application canonique :

$$\mathcal{M}_b^+(W_{s',t'}) \rightarrow \mathcal{M}_b^+(W_{s,t}) \quad \text{pour } [s, t] \subset [s', t'].$$

Démonstration. — D'après le théorème de Kolmogorov il est clair que $\mathcal{M}_b^+(W)$ est limite projective ensembliste de $\mathcal{M}_b^+(W_{s,t})$. D'autre part étant donné une base d'ouverts 0

de W , la topologie étroite de $\mathcal{M}_b^+(W)$ est la moins fine de celles qui rendent s.c.i. les applications $\mu \mapsto \mu(U)$ pour tout $U \in \mathcal{O}$ (cf. [14]). Or, si \mathcal{O} est l'ensemble des ouverts qui sont image réciproque canonique d'un ouvert d'un espace $W_{s,t}$, la limite projective des topologies de $\mathcal{M}_b^+(W_{s,t})$ est moins fine que celle de $\mathcal{M}_b^+(W)$ et possède la propriété précédente. D'où le résultat.

PROPOSITION 2.3. — \mathbb{C} est limite projective topologique d'une suite de cônes isomorphes à $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}_0^\infty([s, t])$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $[s, t]$, nulles en s et t et $a_{s,t}$ la fonction sur $\mathcal{C}_0^\infty([s, t]) \times W_{s,t}$ définie par :

$$\log a_{s,t}(f, \omega) = \omega(s)f'(s) - \omega(t)f'(t) + \int_s^t [(\omega(t) + \frac{1}{2}f(t))f''(t) - P(\omega(t) + f(t)) + P(\omega(t))] dt$$

et soit $C_{s,t}$ le cône des mesures bornées positives sur $W_{s,t}$ qui sont quasi invariantes par les translations de $\mathcal{C}_0^\infty([s, t])$ avec le module $a_{s,t}$. Dans [13] (démonstration de la proposition 11) il est montré que si $\mu \in \mathbb{C}$ alors $\mu_{[s,t]} \in C_{s,t}$ et de la même manière on démontre que le système $(C_{s,t}, r_{s',t}^{s',t'})$ est projectif; $C_{s,t}$ étant muni de la topologie étroite le lemme 2.2 implique que \mathbb{C} est la limite projective topologique de ce système. Pour terminer on établit que $C_{s,t}$ est topologiquement isomorphe à $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^2)$, cet isomorphisme étant décrit par les formules suivantes (cf. [13] proposition 9 et sa démonstration) : désignons pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $\gamma_{s,t}^{x_1, x_2}$ la loi sur $W_{s,t}$ d'un mouvement brownien prenant la valeur x_1 au temps s et la valeur x_2 au temps t [on peut définir $\gamma_{s,t}^{x_1, x_2}$ par sa transformée de Fourier comme dans [13] ou bien désintégrer la loi du mouvement brownien habituel par rapport à l'application (X_s, X_t)], et définissons la probabilité ν_x par :

$$(1) \quad \nu_x(d\omega) = I_x^{-1} \exp - \int_s^t P(\omega(u)) du \cdot \gamma_{s,t}^{x_1, x_2}(d\omega),$$

I_x étant la constante de normalisation; alors toute mesure ν

de $C_{s,t}$ se représente de manière unique sous la forme :

$$(2) \quad \nu = \int_{\mathbf{R}^2} \nu_x \beta(dx) \quad \text{où } \beta \text{ est une mesure sur } \mathbf{R}^2, \text{ et } \beta = (X_s, X_t)\nu.$$

Remarques. — On pourrait remplacer $\mathcal{C}_0^\infty([s, t])$ par $\mathcal{D}(]s, t[)$.

— Pour $\nu = \mu_{[s, t]}$ on peut déduire la formule (2) de la formule III $_{\mathcal{C}, 0}$ du théorème 7 de [12] et donc aussi d'après la proposition 0-5 pour toute mesure $\mu_{[s, t]}$ avec $\mu \in \mathcal{C}$.

3. Étude du cône D; génératrices extrémales de C.

La proposition 0.5 amène naturellement à l'étude du cône D.

La régularité des éléments de D va découler des deux énoncés qui suivent :

LEMME 3.1. — *Soit A un opérateur différentiel hypoelliptique sur un ouvert X de \mathbf{R}^n et $\mathcal{L}_A = \{f \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid A(f) = 0\}$. Sur \mathcal{L}_A la topologie des distributions coïncide avec celle de $\mathcal{C}^\infty(X)$ (et donc aussi avec la topologie de $L_{\text{loc}}^1(X)$).*

Ce lemme est une conséquence du théorème du graphe fermé (voir Malgrange [8], prop. 2, p. 331). Pour deux groupes de variables il admet l'analogie suivant :

LEMME 3.2. — *Soit A (resp : B) un opérateur différentiel hypoelliptique sur un ouvert X (resp : Y) de \mathbf{R}^n (resp : \mathbf{R}^p) et $\mathcal{L}_{A,B} = \{T \in \mathcal{D}'(X \times Y) \mid A_x T = 0, B_y T = 0\}$ ⁽⁴⁾. Toute distribution de $\mathcal{L}_{A,B}$ est une fonction \mathcal{C}^∞ et sur $\mathcal{L}_{A,B}$ les topologies de $\mathcal{D}'(X \times Y)$ et de $\mathcal{C}^\infty(X \times Y)$ coïncident.*

Démonstration. — Soient $\varphi_1 \in \mathcal{D}(X)$ et $\varphi_2 \in \mathcal{D}(Y)$; alors l'application : $\varphi_2 \longmapsto T(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ est une distribution S_{φ_1} sur Y qui satisfait à $BS_{\varphi_1} = 0$; par l'hypoellipticité de B, S_{φ_1} provient d'une fonction de $\mathcal{C}^\infty(Y)$ que l'on notera $T(\varphi_1, y)$; l'application : $\varphi_1 \longmapsto S_{\varphi_1}$ est continue : $\mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}'(Y)$ elle est donc d'après le lemme 3.1 continue : $\mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(Y)$; en particulier l'application $\varphi_1 \longmapsto T(\varphi_1, y)$ est une distribu-

(4) $A_x(T_1 \otimes T_2) = AT_1 \otimes T_2, B_y(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes BT_2 (T_1 \in \mathcal{D}'(X), T_2 \in \mathcal{D}'(Y))$.

tion V_y sur X ; il est immédiat que $AV_y = 0$ et donc V_y est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X)$ notée $V_y(x)$; de plus l'application: $y \mapsto V_y, Y \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ est \mathcal{C}^∞ pour la topologie faible de $\mathcal{D}'(X)$ donc aussi d'après la propriété de Montel de $\mathcal{D}'(X)$, pour la topologie forte de $\mathcal{D}'(X)$ (cf. [15], chap. III, § 2) ou enfin d'après le lemme 3.1 pour la topologie de $\mathcal{C}^\infty(X)$; ceci implique que $(x, y) \mapsto V_y(x)$ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X \times Y)$ et T provient évidemment de cette fonction. Enfin la dernière partie du lemme s'obtient en appliquant à nouveau 2 fois le lemme 3.1.

3.3. — Le lemme 3.1 permet également de compléter la démonstration de la proposition 0.1: $P_t(x, dy)$ étant un semi-groupe de noyaux (cf. [12], théorème 2) on a :

$\forall x$ pour presque tout y $p_{s+t}(x, y) = \int p_s(x, z)p_t(z, y) dz$; soit K_n une suite exhaustive de compacts de \mathbf{R} de fonctions caractéristiques φ_n . D'après 0.1 si on pose :

$$q_{s,t}^n(x, y) = \int p_s(x, z)\varphi_n(z)p_t(z, y) dz,$$

$q_{s,t}^n(x, \cdot)$ est une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ qui satisfait à $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_y\right)q^n = 0$; d'autre part pour presque tout $y \in \mathbf{R}$, $p_{s+t}(x, y)$ est la limite croissante de $q_{s,t}^n(x, y)$; l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - L_y^*$ étant hypoelliptique le lemme 3.1 implique la convergence partout et donc :

$$\forall x \forall y \quad p_{s+t}(x, y) = \lim q_{s,t}^n(x, y) = \int p_s(x, z)p_t(z, y) dz$$

PROPOSITION 3.4. — *Tout élément d du cône D admet une version $\bar{d}_{s,t}(x, y)$ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$ et qui vérifie les équations :*

$$\begin{cases} (E^-) - \frac{\partial \bar{d}}{\partial s} + L_x \bar{d} = 0 \\ (E^+) \quad \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + L_y \bar{d} = 0 \end{cases}$$

(\bar{e}) $\forall s_1 \leq s_2 < 0 \quad \forall t_1 \geq t_2 > 0. \quad \forall x, y$
 $\bar{d}_{s_2, t_2}(x, y) = \int_{\mathbf{R}^2} \bar{d}_{s_1, t_1}(u, v) P_{s_2-s_1}(x, du) P_{t_1-t_2}(y, dv)$

Démonstration. — On va d'abord montrer que d définit une distribution sur $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2$ qui satisfait à (E^-) et (E^+) . D'après un lemme de Doob il existe une version $d_{s,t}(x,y)$ de d qui est mesurable sur $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2$; d'autre part $\underline{\mu}_{|s,t|}(d_{s,t})$ est fini et ne dépend pas de s et t ; à l'aide du théorème de Fubini et du lemme 0.3 on en déduit que $d_{s,t} \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$ et $d_{s,t}(x,y)$ définit bien une distribution. D'après l'équation (ε) (cf. 0.4) et les équations satisfaites par p_t cette distribution satisfait à (E^-) et (E^+) et provient donc d'après le lemme 3.2 d'une fonction \mathcal{C}^∞ : $\bar{d}_{s,t}(x,y)$. Enfin pour établir l'équation $(\bar{\varepsilon})$ on procède comme au n° 3.3: φ_n étant les fonctions caractéristiques d'une suite exhaustive de compacts de \mathbf{R}^2 , si on pose, s_0, t_0 étant fixés, pour $s > s_0, t < t_0$,

$$q_{s,t}^n(x,y) = \int_{\mathbf{R}^2} p_{s-s_0}(x,u) p_{t_0-t}(y,v) \varphi_n(u,v) \bar{d}_{s_0,t_0}(u,v) du dv,$$

$q^n \in \mathcal{C}^\infty(]s_0, 0[\times]0, t_0[\times \mathbf{R}^2)$, satisfait à (E^-) et (E^+) et tend en croissant presque partout vers $\bar{d}_{s,t}(x,y)$ donc partout d'après la fin du lemme 3.2.

Munissons D de la topologie initiale associée aux applications canoniques $D \rightarrow L^1(\underline{\mu}_{|s,t|})$; alors :

PROPOSITION 3.5. — D est métrisable complet et l'isomorphisme $\mathcal{J} : C \rightarrow D$ est bicontinu.

Démonstration. — Soit s_n une suite décroissante non bornée et t_n une suite croissante non bornée; d'après l'équation (ε) on peut se restreindre à la famille dénombrable d'indices (s_n, t_n) pour définir la topologie de D d'où le caractère métrisable complet. Désignons par μ^n et μ des mesures de C et $d^n = \mathcal{J}(\mu^n)$, $d = \mathcal{J}(\mu)$; si $d^n \rightarrow d$ alors pour tout (s,t) , $\mu_{[s,t]}^n \rightarrow \mu_{[s,t]}$ étroitement donc d'après le lemme 2.2 $\mu^n \rightarrow \mu$. Réciproquement si $\mu^n \rightarrow \mu$, $\mu_{|s,t|}^n \rightarrow \mu_{|s,t|}$ étroitement; on en déduit que $\bar{d}^n \rightarrow \bar{d}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$ donc aussi, d'après le lemme 3.2, dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$; comme de plus $\underline{\mu}_{|s,t|}(\bar{d}_{s,t}^n)$ converge vers $\underline{\mu}_{|s,t|}(\bar{d}_{s,t})$ la suite $\bar{d}_{s,t}^n$ est $\underline{\mu}_{|s,t|}$ équiintégrable et converge dans $L^1(\underline{\mu}_{|s,t|})$ (cf. [9], § 2, n° 2,1).

Passons maintenant à l'étude des génératrices extrémales de

D; on remarque l'analogie qui existe entre D et le cône des fonctions positives séparément harmoniques sur un produit d'ouverts bornés de \mathbf{R}^n considéré par divers auteurs; on rappelle en particulier que les génératrices extrémales de ce cône sont formées de produits tensoriels de fonctions harmoniques (cf. [7]). On utilisera la remarque suivante: lorsqu'on fixe les variables s et x la fonction $\bar{d}_{s, \cdot}(x, \cdot)$ est un élément du cône H défini comme suit:

DÉFINITION. — On note H le cône des fonctions $h(t, y)$ indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, positives qui sont solution de $(E^+): \frac{\partial h}{\partial t} + L_y h = 0$; on munit H de la structure uniforme faible définie par les formes linéaires $h \rightarrow \langle \varphi, h \rangle$ où φ est un élément quelconque de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$.

PROPOSITION 3.6. — H est un cône complet, réticulé pour son ordre propre et réunion de chapeaux métrisables.

Démonstration. — Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ et si F est un filtre de Cauchy sur H, $\lim_F \langle h, \varphi \rangle$ existe; on définit ainsi une forme linéaire positive sur \mathcal{D} donc une distribution qui satisfait évidemment à (E^+) ; par l'hypoellipticité de $\frac{\partial}{\partial t} + L_y$, cette distribution est une fonction \mathcal{C}^∞ d'où le caractère complet de H.

— Pour toute fonction $h \in H$ on construit aisément une fonction p continue et > 0 sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ telle que

$$\langle p, h \rangle = \int p(t, y)h(t, y) dt dy \leq 1;$$

on va montrer que $K = \{h \in H | \langle p, h \rangle \leq 1\}$ est un chapeau de H; d'abord les fonctions de K étant uniformément d'intégrale bornée sur chaque compact de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, K est borné dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ donc aussi dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ (cf. lemme 3.1) donc relativement compact dans ce dernier espace (par la propriété de Montel); d'autre part le lemme de Fatou entraîne que K est fermé donc compact dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ et donc K est aussi compact et métrisable dans H.

— le cône H peut être considéré comme un cône de fonc-

tions harmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel (cf. [1]); il est connu que ces cônes sont réticulés pour leur ordre propre (la démonstration que l'on trouve dans le livre de BreLOT [2] chapitre II, § 8 pour le cas classique se transpose sans difficulté : on n'a besoin que d'une base d'ouverts réguliers pour le problème de Dirichlet).

Le lemme suivant précise les liens entre l'équation (E^+) et l'équation

$$(\bar{\varepsilon}^+) \quad \forall s_2 \leq s_1, \quad \forall y, \quad h(s_2, y) = \int_{\mathbf{R}} h(s_1, \nu) P_{s_1-s_2}(y, d\nu).$$

LEMME 3.7. — Si $k \in H$ et satisfait à l'équation $(\bar{\varepsilon}^+)$ et si $h \in H$ et $h \leq k$, alors h vérifie $(\bar{\varepsilon}^+)$.

Démonstration. — On utilise la construction de $\underline{\mu}$ donnée dans [12] : un instant initial $t_0 > 0$ étant fixé on peut écrire :

$$(1) \quad \underline{\mu}_{[t_0, +\infty]} = \int_{\mathbf{R}} P_x^{t_0} \mu_0(dx),$$

$P_x^{t_0}$ étant la probabilité portée par $\mathcal{G}_x([t_0, +\infty[)$, (espace des fonctions continues sur $[t_0, +\infty[$ valant x en t_0) caractérisée par :

$$(2) \quad B_t = X_t + \int_{t_0}^t \zeta(X_s) ds$$

est un $(P_x^{t_0}, \mathcal{F}_{t_0, t})$ mouvement brownien; considérons pour toute fonction $h(t, y)$ deux fois continument dérivable, l'intégrale stochastique :

$$(3) \quad M_t^h = \int_{t_0}^t \frac{\partial h}{\partial y}(s, X_s) dB_s \quad (5);$$

d'après la formule de Ito on a :

$$(4) \quad P_x^{t_0} - p.s \quad h(t, X_t) = h(t_0, x) + M_t^h + \int_{t_0}^t Ah(X_s) ds$$

avec $A = \frac{\partial}{\partial t} + L_y$; si $h \in H$ la dernière intégrale est nulle; $h(t, X_t)$ est donc une martingale locale positive pour la suite

(5) On peut se référer à [11] pour une présentation des intégrales stochastiques.

de $\mathcal{F}_{t_0, t}$ temps d'arrêt T_n donnés par :

$$T_n(\omega) = \text{Inf} (s > t_0 | |X_s(\omega)| \geq n),$$

donc une surmartingale ce qui entraîne :

$$(5) \quad E_x^{t_0}(h(t, X_t)) \leq h(t_0, x)$$

($E_x^{t_0}$ étant l'espérance définie par la probabilité $P_x^{t_0}$); mais en remplaçant h par $k - h$ dans ce raisonnement on établit l'inégalité inverse; d'où l'égalité dans (5), qui équivaut d'après (1) à $(\bar{\varepsilon}^+)$ puisque t_0 et t sont arbitraires.

Pour continuer on a besoin d'une opération de restriction à certains sous-cônes de H de mesures coniques sur H ; une telle opération est facile à mettre en place en utilisant simplement le caractère bien coiffé de H . On notera $M(H)$ le plus petit sous-espace vectoriel de fonctions sur H qui soit réticulé et contienne les formes linéaires continues sur H ; une mesure conique est une forme linéaire positive sur $M(H)$ et, H étant faiblement complet, toute mesure conique sur H a un résultant dans H (cf. [5]). On notera B la tribu sur H engendrée par les formes linéaires continues sur H .

LEMME 3.8. — *Soit A un sous-cône de H appartenant à B , π une mesure conique sur H ; il existe une unique mesure conique π^A possédant la propriété suivante : si π provient d'une mesure de Radon λ portée par un chapeau K de H , π^A provient de λ^A , restriction de λ à A ; on a $\pi^A \leq \pi$ et si $\pi^A = c\pi$ pour tout A alors π provient d'une mesure de Dirac.*

Démonstration. — On va montrer que si π provient de λ et λ' alors (1) $\lambda'(f) = \lambda(f)$ pour toute fonction f positivement homogène, bornée sur chaque chapeau et B -mesurable; on sait déjà que (1) a lieu pour $f \in M(H)$. Soit H_1 une base de H définie par $H_1 = \{h | l(h) = 1\}$, l étant une forme linéaire continue positive sur H et pour toute fonction φ sur H_1 , soit $\hat{\varphi}$ l'unique prolongement positivement homogène de φ à H . Soit E l'espace des restrictions à H_1 des fonctions de $M(H)$ et F l'espace des fonctions φ bornées sur H_1 , telles que $\hat{\varphi}$ soit B -mesurable et $\lambda(\hat{\varphi}) = \lambda'(\hat{\varphi})$.

Par application de la remarque qui suit le théorème 1.20 de [9], on obtient que F contient toutes les fonctions bornées et mesurables par rapport à la tribu engendrée par E c'est-à-dire « $B \cap H_1$ ». D'où (1) lorsque f est bornée sur H_1 et le cas général en écrivant pour $f \geq 0$: $f = \sup_n (\inf(f, nl))$.

On pose alors pour $f \in M(H)$ $\pi^A(f) = \lambda(\chi_A f)$ et le reste de la proposition est immédiat (on peut comparer cette méthode de restriction avec [5], prop. 30.8).

THÉORÈME 3.9. — *Les génératrices extrémales de C sont formées de mesures markoviennes.*

Démonstration. — D'après la proposition 0.5, il suffit de montrer que les génératrices extrémales de D sont formées d'éléments décomposés. Soit $d \in D$ et A un sous-cône de H B -mesurable; on va définir un élément d^A de D de la manière suivante: soit d la version \mathcal{C}^∞ de d ; pour tout $(s, x) \in \mathbf{R}^- \times \mathbf{R}$, $(t, y) \mapsto d_{s,t}(x, y)$ est un élément de H noté $h_{s,x}$, représenté par une unique mesure conique maximale $\pi_{s,x}^A$; on considère la mesure conique $\pi_{s,x}^A$ (voir lemme 3.8) dont le résultant $h_{s,x}^A$ est dans H et on pose:

$d_{s,t}^A(x, y) = h_{s,x}^A(t, y)$. Montrons que d^A satisfait à l'équation (ε); $h_{s,x}^A$ étant majoré par $h_{s,x}$ on a d'abord pour $t' \geq t$ d'après le lemme 3.7 :

$$(1) \quad \forall s, x, t, y, t' \quad h_{s,x}^A(t, y) = \int h_{s,x}^A(t', \nu) P_{t'-t}(y, d\nu).$$

D'autre part d'après ($\bar{\varepsilon}$) (voir proposition 3.4) on a pour $s' \geq s$

$$\forall s, x, t, y, s' \quad h_{s,x}(t, y) = \int h_{s',u}(t, y) P_{s-s'}(x, du);$$

toute forme linéaire l continue sur H étant donnée par $l(h) = \langle \varphi, h \rangle$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ on a aussi d'après le théorème de Fubini :

$$(2) \quad l(h_{s,x}) = \int l(h_{s',u}) P_{s-s'}(x, du);$$

(2) implique que pour toute fonction $f \in M(H)$:

$$(3) \quad \pi_{s,x}(f) = \int \pi_{s',u}(f) P_{s-s'}(x, du),$$

par le raisonnement suivant : on remarque que l'intégrale

$$I(f) = \int \pi_{s', u}(f) P_{s-s'}(x, du) \text{ existe;}$$

en effet cette intégrale existe d'après (2) lorsque f est une forme linéaire et dans le cas général cela résulte des propriétés suivantes :

$u \mapsto \pi_{s', u}(f)$ est une fonction borélienne (voir le théorème 30.1, VII de [5]) et $|f|$ est majorée par une forme linéaire continue (voir la démonstration de la proposition 30.13 de [5]); $f \mapsto I(f)$ est une mesure conique, maximale comme intégrale de mesures coniques maximales (cf. [6] corollaire 30) dont le résultant est $h_{s, x}$ d'après (2); d'où (3), par unicité de la représentation intégrale de $h_{s, x}$. Par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 3.8 on déduit de (3) la même égalité pour les mesures $\pi_{s, x}^A$ donc aussi :

$$(4) \quad h_{s, x}^A(t, y) = \int h_{s', u}^A(t, y) P_{s-s'}(x, du).$$

La conjonction de (1) et (4) entraîne que d^A satisfait à (ε) ; il est alors clair que $d^A \in D$ et que $d^A < d$ ($<$ désignant l'ordre propre de D). Supposons maintenant que d appartienne à une génératrice extrémale de D ; alors nécessairement $d^A = cd$, $c \in \mathbf{R}$ et en particulier :

$$(5) \quad h_{s, x'}^A = ch_{s, x} \quad \text{pour tous } s, x;$$

il en résulte d'abord que $h_{s, x}$ appartient à une génératrice extrémale $\Delta_{s, x}$ de D (en effet d'après le lemme 3.8, $\pi_{s, x}^A$ provient d'une mesure de Dirac et $\pi_{s, x}^A$ est maximale); d'autre part s_0, x_0 étant fixés on a $\Delta_{s, x} = \Delta_{s_0, x_0}$: car dans le cas contraire pour tout A contenant Δ_{s_0, x_0} et disjoint de $\Delta_{s, x}$ on aurait :

$h_{s_0, x_0}^A = h_{s_0, x_0}$ et $h_{s, x}^A = 0$. Il existe donc une fonction $\varphi(s, x)$ telle que $h_{s, x} = \varphi(s, x)h_{s_0, x_0}$, ce qui revient à dire que d est décomposée.

Remarque. — La réciproque du théorème 3.9 est fautive; en effet, $d_{s, t}$ peut se décomposer sous la forme $\varphi_s^+ \otimes \varphi_t^-$ sans être extrémale dans D (pour cela il est nécessaire en effet que φ_t^- soit extrémale dans le cône des $(\underline{\mu}, \mathcal{F}_t^-)$ martingales positives (resp : $\varphi_s^+, \mathcal{F}_s^+$)).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. BONY, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de théorie du potentiel, *Cours au C.I.M.E.* (Juin 1970).
- [2] M. BRELOT, Éléments de la théorie classique du potentiel, (C.D.U., Paris, 4^e édition).
- [3] BOURBAKI, Intégration sur les espaces topologiques séparés.
- [4] P. COURREGE et P. RENOARD, Oscillateur anharmonique, mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et théorie quantique des champs en dimension $d = 1$, *Astérisque*, n° 22-23.
- [5] G. CHOQUET, Lectures on analysis; II: representation theory.
- [6] G. CHOQUET, Les cônes faiblement complets dans l'analyse, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, (1962), 317.
- [7] K. GOWRISANKARAN, Limites fines et fonctions doublement harmoniques, *C.R.A.S.*, Paris, tome 262 (14/2/1966).
- [8] B. MALGRANGE, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, VI (1955-56), 271-354.
- [9] P. A. MEYER, Probabilités et potentiel.
- [10] J. NEVEU, Bases mathématiques du calcul des probabilités.
- [11] P. PRIOURET, École d'été de probabilités de Saint-Flour, 1973, *Lectures notes in mathematics*, Vol. 390.
- [12] P. PRIOURET et M. YOR, Processus de diffusion à valeurs dans \mathbf{R} et mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *Astérisque*, n° 22-23.
- [13] G. ROYER, Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, A paraître.
- [14] Séminaire SCHWARTZ 1969/70, Applications radonifiantes, exposé 3.
- [15] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions.
- [16] M. YOR, Étude de mesures de probabilités sur $\mathcal{C}(\mathbf{R}^{++}, \mathbf{R})$ quasi-invariantes par les translations de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{++}, \mathbf{R})$, A paraître.

Manuscrit reçu le 21 mai 1975
Proposé par G. Choquet.

G. ROYER et M. YOR,
Équipes d'Analyse et de Probabilités
E.R.A. au C.N.R.S. n° 294 et n° 1
Université Pierre-et-Marie-Curie
Tour 46, 4^e étage
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.