ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Julien AUROUET

Dynamique et formes normales d'équations différentielles implicites

Tome 64, nº 5 (2014), p. 1903-1945.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2014__64_5_1903_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
64, 5 (2014) 1903-1945

DYNAMIQUE ET FORMES NORMALES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES IMPLICITES

par Julien AUROUET (*)

Résumé. — Dans cet article on cherche à comprendre la dynamique locale d'équations différentielles implicites de la forme $F(x, y, dy) = 0$, où F est un germe de fonction sur $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n*}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), au voisinage d'un point singulier. Pour cela on utilise la relation intime entre les systèmes implicites et les champs liouvilliens. La classification par transformation de contact des équations implicites provient de la classification symplectique des champs liouvilliens. On utilise alors toute la théorie des formes normales pour les champs de vecteurs, dans le cas holomorphe (Brjuno, Siegel, Stolovitch) et dans le cas réel (Sternberg), que l'on adapte pour les champs liouviliens avec des transformations symplectiques. On établit alors des résultats de classification des équations implicites en fonction des invariants dynamiques, ainsi que des conditions d'existence de solutions locales via les formes normales.

Abstract. — In this paper, we try to understand the local dynamic of implicit equations of the form $F(x, y, dy) = 0$, where F is a germ of function on $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n*}$ (where $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), in a neighborhood of a singular point. To this end we use the relation between implicit systems and liouvillian vector fields. The classification by contact transformations of implicit equations come from the symplectic classification of liouvillian vector fields. We use all normal forms theory for vector fields, in complex case (Bjruno, Siegel, Stolovitch), and in real case (Sternberg), adapted to liouvillian fields with symplectic transformations. We establish classification results for implicit equations according to the dynamical invariants, and existence conditions of local solutions using normal forms.

Mots-clés : Formes normales, équations différentielles implicites, champs de liouville, normalisation symplectique.
Classification math. : 34Mxx, 37Fxx.
(*) Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence "ANR-10-BLAN 0102".

Introduction

On se donne une équation différentielle :

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

où F est une fonction holomorphe de trois variables complexes. On s'intéresse au cas non résoluble par rapport à y', c'est à dire au voisinage d'un point p de $\mathbb{C}^3$ où la dérivée de F par rapport la troisième variable s'annule. On note S la surface de $\mathbb{C}^3$ d'équation $F(x,y,z)=0$ et Γ l'ensemble des points p de $\mathbb{C}^3$ tels que $F(p)=\frac{\partial F}{\partial z}(p)=0$. On cherche alors à résoudre l'équation (1), c'est à dire trouver des fonctions f holomorphes au voisinage d'un point p de Γ, telles que la fonction :

$$x \mapsto F(x,f(x),f'(x))$$

soit identiquement nulle au voisinage de p.

L'idée classique est de remplacer la valeur y' par la troisième coordonnée z et d'ajouter une contrainte sur celle-ci (méthode de Lie). L'équation est alors équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ dy - z\cdot dx = 0 \end{cases} \tag{2}$$

L'espace $\mathbb{C}^3$ est alors muni d'une structure de contact définie par la forme différentielle :

$$\Omega = dy - zdx.$$

On a donc en chaque point p de S un plan de contact défini par l'équation $\Omega(p)=0$; ces plans de contact sont tous "verticaux", c'est dire qu'il contiennent tous la troisième direction d'axe Oz. Les 1-jets des solutions de (1) sont donc les feuilles de l'équation :

$$\Omega|_S = 0$$

On appelle ce feuilletage, *le feuillage caractéristique* de l'équation (1).

Il y a alors deux types de singularité qui apparaissent : Si p appartient à $S\setminus\Gamma$ alors le plan tangent à S en p est transverse au plan de contact défini par l'équation $\Omega(p)=0$. En revanche si p appartient à Γ, ces deux plans peuvent être transverses ou confondus. Dans le cas transverse on dira alors que p est *un point singulier à tangent transverse* (ou point singulier régulier), et dans l'autre cas on dira que p est *un point singulier à tangent non-transverse.*

Dire qu'un point $p=(x_p,y_p,z_p)$ est singulier à tangent non-transverse revient à dire que :

$$\Omega(p)\wedge dF(p)=0$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x}(p) + z_p \frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dans le cas où $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(p) \neq 0$, p est alors un point pli. Dans [6], des modèles locaux dans le cas réel pour ces points plis singuliers sont présentés :

$$Y'^2 = X, \text{ (Point pli singulier régulier)}$$

$$Y'^2 = Y, \text{ (Point pli de Clairaut)}$$

Nous allons nous intéresser à l'étude de l'équation (1) au voisinage d'un point pli singulier à tangent non-transverse de $\mathbb{C}^3$ noté $p = (x_p, y_p, z_p)$, lorsque p n'est pas un point critique de F.

On utilisera des modèles d'équations implicites élémentaires pour établir des résultats de classification, en fonction d'un invariant dynamique que l'on déterminera. Puis on s'intéressera au problème en dimension supérieure de la forme $F(x_1, ..., x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0$, où F est une fonction de $\mathbb{C}^{2n+1}$. Et enfin, on utilisera les résultats obtenues et l'étude des solutions des équations modèles pour comprendre la dynamique locale, dans le cas complexe puis dans le cas réel.

La théorie classique des formes normales a pour but de classifier des systèmes dynamiques tels que des champs de vecteurs, ou comme nous le verrons, des équations différentielles implicites. Dans cet article, nous ne chercherons pas à étudier la "dynamique" à proprement dite des solutions, en revanche les résultats de classification permettront de transporter les propriétés dynamiques des formes normales sur toutes leurs classes d'équivalence.

En effet, si d'un côté nous sommes capables de normaliser un système par une transformation lisse, et de l'autre nous comprenons la dynamique de la forme normale, qui en général est plus simple à étudier, alors nous pouvons comprendre la dynamique du système initial ainsi que de n'importe quel autre système analytiquement équivalent.

Nous parlerons donc de dynamique en ce sens.

Cet article a été réalisé dans le cadre de mon travail de thèse sous la direction de Laurent Stolovitch. Je remercie également Marc Chaperon et Ivar Ekeland pour leurs précieux conseils.

Notations

Pour tout champ de vecteurs $X=\sum_{k=1}^{n} X_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ et $Y=\sum_{k=1}^{n} Y_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ leur crochet de Lie est égal à :

$$[X,Y]=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}-Y_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pour toutes fonctions f et g des variables $(x_i,z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ le crochet de poisson de f et g est égale à :

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial z_i}$$

Avec ces notations, on considère les champs hamiltoniens des fonctions f et g : $H_f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i}$ et $H_g=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i}$ Et dans ce cas leur crochet de lie est égale à

$$[H_f,H_g]=H_{\{f,g\}}.$$

Formule de Cartan : Pour tout champ de vecteur X on a :

$$\mathcal{L}_X=i_Xd+di_X$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs, f une fonction, ω une forme différentielle et φ un difféomorphisme. On alors alors les formules suivantes :

$$[X,fY]=f[X,Y]+\mathcal{L}_X(f)Y.$$

$$\mathcal{L}_{fX}\omega=f\mathcal{L}_X\omega+(\mathcal{L}_Xf)\,\omega.$$

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\omega)=\mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega)$$

1. Des équations différentielles implicites aux champs liouvilliens

1.1. Forme canonique

Équivalence des équations différentielles. Deux germes d'équations différentielles

$$E_1\ :F_1(x,y,y')=0 \text{ et } E_2\ :F_2(X,Y,Y')=0$$

sont équivalents (respectivement, formellement équivalents) s'il existe un germe de biholomorphisme (respectivement, un difféomorphisme formel) $\varphi(x,y,z)=(X,Y,Z)$ de $\mathbb{C}^3$ qui envoie le germe de surface $S_1\ :F_1(x,y,z)=$

0 sur le germe de surface S_2 : $F_2(X,Y,Z)=0$ et qui préserve la structure de contact, c'est à dire tel que $(dY-ZdX)\wedge(dy-zdx)=0$. Lorsque l'équivalence est biholomorphe on écrira :

$$E_1 \sim E_2.$$

D'un autre côté, on dira que les feuilletages caractéristiques de E_1 et E_2 sont équivalents, s'il existe un germe de biholomorphisme qui envoie S_1 sur S_2 et qui envoie le feuilletage caractéristique de E_1 sur celui de E_2.

Exemple : la transformation de Legendre.

$$(x,y,z)\mapsto(-z,y-xz,x)$$

Cette transformation de contact permet d'échanger x et z dans l'équation.

Exemple. On considère le changement de variable suivant :

$$(x,y,z)\mapsto(x-x_p,y-y_p-z_p(x-x_p),z-z_p)$$

C'est une transformation de contact qui change p en zéro.

On peut donc se ramener au cas où le point pli singulier que l'on étudie est 0. Dans ce cas les équations (3) deviennent :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0)=\frac{\partial F}{\partial z}(0)=0 \text{ ainsi } \frac{\partial F}{\partial y}(0)\neq 0 \tag{4}$$

car 0 n'est pas un point critique de F. Alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction g de $\mathbb{C}^2$ holomorphe au voisinage de 0 et telle que l'équation de départ (1) soit équivalente à :

$$y=g(x,y') \tag{5}$$

ou encore à :

$$\begin{cases} y=g(x,z) \\ dy-zdx=0 \end{cases} \tag{6}$$

D'après les équations (4), g est une fonction d'ordre 2.

1.2. Réduction à un système à deux coordonnées

Avec l'écriture (6) on peut se ramener à un système à deux coordonnées équivalent : on choisit x et z comme système de coordonnées locales sur S. La forme de contact devient alors :

$$\Omega = dy-zdx=\left(\frac{\partial g}{\partial x}-z\right)dx+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)dz$$

On considère alors le champ de vecteur suivant :

$$X = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(z - \frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

Ce champ caractérise le feuilletage de la forme de contact : Les courbes intégrales de ce champ, ramenées sur S par la carte donnée par $(x,z) \mapsto (x, g(x,z), z)$, donnent exactement le feuilletage caractéristique de l'équation. Les solutions recherchées sont alors les projections sur le plan des x et y du feuilletage caractéristique.

Ainsi, pour comprendre la dynamique en 0 de l'équation (5) il faut comprendre celle du champ X qui lui est associée.

1.3. Structure symplectique

Définition. On note $\omega := dz \wedge dx$ la forme symplectique standard de $\mathbb{C}^2$. On dit qu'un champ de vecteurs analytique V est *liouvillien* si $\mathcal{L}_V\omega = \omega$.

On remarque alors que la différence de deux champs de vecteurs liouvilliens est un champ hamiltonien.

Le champ de vecteurs X défini précédemment, est la somme du champ de vecteurs hamiltonien $H_g = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}$ et du champ $S_0 = z\frac{\partial}{\partial z}$, qui est liouvillien. Comme H_g est hamiltonien, on a $\mathcal{L}_{H_g}\omega = 0$, par conséquent X est un champ de vecteur liouvillien.

La proposition suivante est une adaptation d'un résultat de Manouchehri dans le cadre holomorphe. [9]

Proposition 1.1. — *On considère deux germes d'équations :*

$$\begin{array}{ccc} (E_1)\ :\ y = g_1(x,y') & & (E_2)\ :\ Y = g_2(X,Y') \\ \text{ou} & \text{et} & \text{ou} \\ \begin{cases} S_1\ : y = g_1(x,z) \\ dy - zdx = 0 \end{cases} & & \begin{cases} S_2\ : Y = g_2(X,Z) \\ dY - ZdX = 0 \end{cases} \end{array}$$

dont on déduit les germes de champs de vecteurs liouvilliens X_1 et X_2 correspondants.

Soit Φ un germe de biholomorphisme de $\mathbb{C}^3$ qui envoie le germe de surface $(S_1,0)$ sur le germe de surface $(S_2,0)$ et qui préserve la forme de contact Ω. Alors $\varphi := \pi_*\Phi|_{S_1}$ (avec $\pi\ :\ \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,z)$) est un germe de biholomorphisme symplectique de $(\mathbb{C}^2,0)$ qui envoie X_1 sur X_2.

Réciproquement, tout germe de difféomorphisme symplectique φ de $(\mathbb{C}^2,0)$ qui envoie le champ X_1 sur le champ X_2 se relève par π en un unique germe de difféomorphisme Φ de $\mathbb{C}^3$ qui non seulement envoie $(S_1,0)$ sur $(S_2,0)$ mais aussi qui préserve la forme de contact Ω.

Et dans ce cas, on a :

$$(E_1) \sim (E_2)$$

Démonstration. — La démonstration est analogue à [9]. Comme le germe $\Phi\ : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ préserve Ω, on a :

$$\Phi_*(dy - zdx) = dY - ZdX$$

donc si on applique la différentielle extérieure on obtient :

$$\Phi_*(-dz \wedge dx) = -dZ \wedge dX.$$

Donc φ est bien symplectique.

De plus, comme Φ envoie S_1 sur S_2 :

$$\Phi|_{S_1 *}(dy - zdx|_{S_1}) = dY - ZdX|_{S_2}$$

or sur $S_1\ : dy = \frac{\partial g_1}{\partial x}dx + \frac{\partial g_1}{\partial z}dz$ et sur $S_2\ : dY = \frac{\partial g_2}{\partial X}dX + \frac{\partial g_2}{\partial Z}dZ$, donc

$$\varphi_* \left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - z \right) dx + \frac{\partial g_1}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial X} - Z \right) dX + \frac{\partial g_2}{\partial Z} dZ$$

ce qui s'écrit également :

$$\varphi_*(i_{X_{g_1}}(dx \wedge dz)) = i_{X_{g_2}}(dX \wedge dZ)$$

or :

$$\varphi_*(i_{X_{g_1}}(dx \wedge dz)) = i_{\varphi_*(X_{g_1})}(\varphi_*(dx \wedge dz)) = i_{\varphi_*(X_{g_1})}(dX \wedge dZ)$$

car φ est symplectique. De plus, $dX \wedge dZ$ est une 2-forme non dégénérée donc on en déduit que :

$$\varphi_*(X_{g_1}) = X_{g_2}$$

Réciproquement : Soit φ un germe de difféomorphisme symplectique de $\mathbb{C}^2$ tel que $\varphi_*(X_{g_1}) = X_{g_2}$. On note, $X(x, z)$ et $Z(x, z)$ les deux composantes de φ. Comme φ est symplectique, on a alors : $dx \wedge dz = dX \wedge dZ$. Ou encore : $d(ZdX - zdx) = 0$. D'après le lemme de Poincaré, il existe une unique fonction h nulle en zéro telle que : $ZdX - zdx = dh$. On construit alors Φ en prenant comme composantes (X, Y, Z), où X et Z sont les mêmes que les composantes de φ et $Y(x, y, z) = y + h(x, z)$. Il en résulte que : $dY - ZdX = dy - zdx$.

Et de même, si $\varphi_* X_{g_1} = X_{g_2}$ alors :

$$\varphi_* \left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - z \right) dx + \frac{\partial g_1}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial X} - Z \right) dX + \frac{\partial g_2}{\partial Z} dZ$$

ou encore $\Phi_* (dg_1 - dy) = dg_2 - dY,\ \iff\ \Phi_* S_1 = S_2.$ □

2. Normalisation

Introduction. Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe, on note S sa partie linéaire. On dit que X est analytiquement normalisable s'il existe un changement de coordonnées local biholomorphe φ tangent à l'identité en 0 tel que $\varphi^*X = S + N$, où N est un champ de vecteurs qui commute avec S, soit $[S,N] = 0$. Sous cette condition on dit que $NF := S + N$ est une forme normale.

Pour plus de détails sur la théorie classique des formes normales de champs de vecteurs holomorphes, le lecteur pourra se référer à [1] ou [14].

D'après la proposition 1.1, si on pouvait normaliser holomorphiquement et symplectiquement le champ de Liouville X associé à l'équation (5), il suffirait de prendre l'équation différentielle implicite associée au champ de vecteurs normalisé pour obtenir un modèle local d'équation différentielle implicite, autrement dit une "forme normale", et de dynamique équivalente à celle de l'équation (5).

2.1. Équations différentielles implicites élémentaires :

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y = \alpha y'^2 + \beta x y' + \gamma x^2$$

On applique le changement de variable suivant lorsque $\alpha \neq 0$:

$$\varphi_{\alpha,\beta,\gamma} \;:\; \begin{cases} X = \frac{1}{2\alpha} \cdot x \\ Y = \frac{1}{2\alpha} \cdot y + \frac{\beta}{8\alpha^2} \cdot x^2 \end{cases}$$

$$\text{alors } Y' = \frac{dY}{dX} = y' + \frac{\beta}{2\alpha} \cdot x$$

On vérifie qu'avec $Z = z + \frac{\beta}{2\alpha} \cdot x$, le changement de variable est bien valide :

$$dY - ZdX = \frac{1}{2\alpha} dy + \frac{\beta}{4\alpha^2} x dx - (z + \frac{\beta}{2\alpha} x) \frac{1}{2\alpha} dx = \frac{1}{2\alpha}(dy - zdx)$$

$$\text{donc } (dY - ZdX) \wedge (dy - zdx) = 0$$

Et on obtient l'équation suivante :

$$Y = \frac{1}{2}(Y'^2 + \chi X^2) \tag{7}$$

avec $\chi = \beta(1-\beta) + 4\alpha\gamma$.

En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(Z^2+\chi X^2)-Y &= \frac{1}{2}(z^2+\frac{\beta}{\alpha}zx+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}x^2+\frac{\chi}{4\alpha^2}x^2)-\frac{1}{2\alpha}y-\frac{\beta}{8\alpha^2}x^2\\
&= \frac{1}{2}z^2+\frac{\beta}{2\alpha}xz+\frac{\beta^2}{8\alpha^2}x^2+\frac{\chi}{8\alpha^2}x^2-(\frac{1}{2}z^2+\frac{\beta}{2\alpha}xz+\frac{\gamma}{2\alpha}x^2)-\frac{\beta}{8\alpha^2}x^2\\
&= \frac{(\chi-(\beta(1-\beta)+4\alpha\gamma))}{8\alpha^2}x^2=0
\end{aligned}$$

Si on applique à (7) la transformation de Legendre, puis un changement de variable $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ avec $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$ et $\gamma=\frac{\chi}{2}$, on obtient la même équation que (7) mais avec X et Y' échangés, pour la même valeur de χ.

Dans le cas où $\alpha=0$ mais $\gamma\neq 0$ on pourra se ramener au cas précédent ($\alpha\neq 0$) en utilisant la transformation de Legendre.

Si $\alpha=\gamma=0$, on applique la transformation suivante, où $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\frac{1}{2}\}$:

$$\Psi_\lambda\ :\left\{\begin{array}{l}
X=\frac{1}{1-2\lambda}\cdot x+z\\
Y=y+\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)^2}\cdot x^2+\frac{\lambda}{1-2\lambda}\cdot xz+\frac{1-\lambda}{2}\cdot z^2\\
Z=\frac{\lambda}{1-2\lambda}\cdot x+(1-\lambda)\cdot z
\end{array}\right.$$

C'est bien une transformation de contact :

$$\begin{aligned}
dY-ZdX &= dy+\frac{\lambda}{(1-2\lambda)^2}xdx+\frac{\lambda}{1-2\lambda}zdx+\frac{\lambda}{1-2\lambda}xdz+(1-\lambda)zdz\\
&\quad -\frac{\lambda}{(1-2\lambda)^2}xdx-\frac{(1-\lambda)}{(1-2\lambda)}zdx-\frac{\lambda}{1-2\lambda}xdz-(1-\lambda)zdz\\
&= dy-zdx
\end{aligned}$$

Et elle envoie l'équation :

$$y=\lambda xy' \tag{8}$$

sur l'équation (7), avec $\chi=\lambda(1-\lambda)$. En effet :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(Z^2+\chi X^2)-Y=\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2}{(1-2\lambda)^2}x^2+\frac{2\lambda(1-\lambda)}{(1-2\lambda)}xz+(1-\lambda)^2z^2+\frac{\chi}{(1-2\lambda)^2}x^2+\frac{2\chi}{1-2\lambda}xz+\chi z^2\right)\\
&\qquad -y-\frac{\lambda}{2(1-2\lambda)^2}x^2-\frac{\lambda}{1-2\lambda}xz-\frac{(1-\lambda)^2}{2}z^2\\
&=x^2\underbrace{\left(\frac{\lambda^2+\chi-\lambda}{2(1-2\lambda)^2}\right)}_{=0}+xz\underbrace{\left(\frac{\lambda(1-\lambda)+\chi-\lambda}{1-2\lambda}\right)}_{=\lambda}+z^2\underbrace{\left(\frac{(1-\lambda)^2+\chi-(1-\lambda)}{2}\right)}_{=0}-y\\
&=\lambda xz-y=0
\end{aligned}$$

Les rôles de λ et $1-\lambda$ sont échangeables via une transformation de Legendre et laissent toujours χ inchangé.

Champs de vecteurs liouvilliens correspondants. Le champ liouvillien associé à l'équation (7) est :

$$X = z\frac{\partial}{\partial x} + (z-\chi x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ce champ de vecteur linéaire se diagonalise pour $\chi \neq \frac{1}{4}$ ($\lambda \neq \frac{1}{2}$) en le champ de vecteurs :

$$S = \lambda x\frac{\partial}{\partial x} + (1-\lambda)z\frac{\partial}{\partial z}$$

qui est le champ de vecteurs liouvillien associé à l'équation (8). Il est même possible de faire cette diagonalisation à l'aide d'une transformation linéaire symplectique. Désormais, S désignera systématiquement ce champ de vecteurs diagonal.

Solutions. Dara traite les différents cas réels de l'invariant χ (voir [6]) pour étudier les solutions de l'équation $y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$ au voisinage d'un point (x_0, y_0). Dans le cas complexe, l'étude est similaire : on cherche les courbes intégrales de son champ liouvillien associé $X = z\frac{\partial}{\partial x} + (z-\chi x)\frac{\partial}{\partial z}$ au voisinage d'un point (x_0, z_0) de sorte que $y_0 = \frac{1}{2}({z_0}^2 + \chi {x_0}^2)$. Au voisinage de chaque point (x_0, y_0) tel que $y_0 \neq \frac{\chi}{2}x_0^2$, il y a alors deux pentes z_0 possibles. Lorsque $\chi \neq \frac{1}{4}$, on trouve :

$$\begin{cases} x(u) = \left(x_0 \cos(\omega u) + \frac{2z_0 - x_0}{2\omega}\sin(\omega u)\right) e^{u/2} \\[2ex] z(u) = \left(z_0 \cos(\omega u) + \frac{z_0 - 2\chi x_0}{2\omega}\sin(\omega u)\right) e^{u/2} \end{cases}$$

avec $\omega = \pm\frac{\sqrt{4\chi - 1}}{2}$. Ces solutions généralisent les résultats du cas réel : pli foyer ($\chi > \frac{1}{4}$), pli noeud ($0 < \chi < \frac{1}{4}$), pli col ($\chi < 0$) par le calcul des racines carrées du nombre complexe $4\chi - 1$.

On obtient y en fonction de u en écrivant : $y(u) = \frac{1}{2}(z(u)^2 + \chi x(u)^2)$, appelons $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par $u \mapsto (x(u), y(u))$ dans le plan $\mathbb{C}^2$ des x et y. Par le théorème des fonctions implicites, on peut écrire y en fonction de x si et seulement si $\dot{x}(0) \neq 0$, autrement dit si $z_0 \neq 0$. Et on obtient alors deux solutions ayant pour pentes respectives z_0 et $-z_0$ au point (x_0, y_0).

Si par contre $z_0 = 0$ alors l'équation (7) n'admet pas de solution en (x_0, y_0) mais si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point (x_0, y_0) et contient les trajectoires de deux solutions qui se réunissent en (x_0, y_0).

La propriété $z_0 = 0$ est équivalente à $y_0 = \frac{\chi}{2}x_0^2$, ce qui revient à dire que le point (x_0, y_0) appartient à la courbe $\Delta = \pi_*(\Gamma)$, où Γ est la courbe singulière $\{\frac{\partial F}{\partial z} = 0\}$ de $\mathbb{C}^3$, et où π est la projection sur $\mathbb{C}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2.1. — *Lorsque $\chi \neq \frac{1}{4}$, l'équation $y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$, $y(x_0) = y_0$ admet deux solutions locales si $y_0 \neq \frac{\chi}{2}x_0^2$, et n'admet pas de solution dans le cas contraire, mais si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, il existent deux solutions qui se réunissent en (x_0, y_0) et qui sont contenues dans la variété image de la courbe $\mathcal{C}$.*

2.2. Normalisation des équations différentielles implicites

On se donne un germe d'équation différentielle implicite de la forme (5) :

$$y = \alpha y'^2 + \beta x y' + \gamma x^2 + ...$$

où "..." désigne des termes d'ordres supérieurs à 3 en x et en y'. D'après ce qui précède on peut réduire cette équation sous la forme :

$$y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + ... \tag{9}$$

ou encore à :

$$y = \lambda x y' + ... \tag{10}$$

Soit X le champ de vecteurs liouvillien associé à cette dernière équation. Sa différentielle est le champ S défini précédemment, et ce champ s'écrit alors : $X = S + R$, où R est une perturbation d'ordre supérieur à 2. Comme S est également un champ de vecteurs liouvillien, R est un champ hamiltonien (i.e. $\mathcal{L}_R\omega = 0$), ainsi que ses termes à tout ordre.

Réciproquement : On se donne un germe de champ de vecteur liouvillien holomorphe quelconque, nul en zéro et qui a pour partie linéaire S, que l'on note $X = S + R$, où S est défini comme précédemment et R est un champ hamiltonien :

$$R = \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}, \text{ et } h \text{ un germe de fonction holomorphe.}$$

Alors l'équation différentielle implicite associée à X est exactement :

$$y = \lambda x y' + h(x, y')$$

Forme normale. Admettons que X soit normalisable par un difféomorphisme holomorphe et symplectique en une forme normale notée NF, dans ce cas NF serait holomorphe et liouvillienne et d'après la proposition 1.1, l'équation différentielle implicite associée à NF serait alors équivalente à l'équation de départ associée au champ X. Cette équation serait alors une forme normale de l'équation (9).

Je donne des explications plus détaillées sur la structure des formes normales de ces équations différentielles implicites dans le cas de la dimension supérieure section 6.

2.3. Normalisation formelle de champ de vecteurs liouvilliens

D'après ce qui précède on peut transformer l'équation (5) à l'aide d'un difféomorphisme qui préserve la structure de contact définie par la forme $dy - zdx$, pour qu'elle soit de type (9).

On considère alors une équation différentielle implicite de la forme (9), mais on se place dans le cas où $\chi \neq \frac{1}{4}$ c'est à dire $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Résonances. Les valeurs propres de S étant λ et $(1-\lambda)$, on appelle résonances toutes relations de la forme :

$$q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = \lambda \text{ ou } q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = (1-\lambda)$$

$$\text{avec } (q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, q_1 + q_2 \geqslant 2$$

Proposition 2.2. — *Soit X un germe de champ de vecteurs holomorphe liouvillien de $(\mathbb{C}^2, 0)$, nul en zéro et de partie linéaire S. Alors X est symplectiquement formellement normalisable.*

Démonstration. — Soit k un entier naturel non nul. On suppose X normalisé jusqu'à l'ordre $k-1$ et on va montrer qu'on peut trouver un changement de coordonnées symplectique qui normalise X jusqu'à l'ordre k. Pour cela on écrit :

$$X = S + N_{k-1} + V_k + R_{k+1}$$

où N_{k-1} est la partie déjà normalisée de X (i.e. $[S, N_{k-1}] = 0$), V_k est un champ de vecteurs homogène d'ordre k et hamiltonien et où R_{k+1} est une perturbation hamiltonienne d'ordre supérieure à $k+1$.

On cherche un changement de coordonnée formel et symplectique. On va le chercher tangent à l'identité, comme le flot au temps 1 d'un champ hamiltonien, donc de la forme $\varphi_k = (Id + U_k + ...)$, (où ... désigne des termes d'ordres supérieurs à $k+1$ et) où U_k est homogène de degré k et l'hamiltonien d'une fonction holomorphe u nulle en zéro :

$$U_k(x,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial z}(x,z), -\frac{\partial u}{\partial x}(x,z)\right)$$

Écrivons ce que donne le champ de vecteur X via ce changement de variable :

$$\begin{aligned}&{\varphi_k}^* X = X + [U_k, X] + \dots\\ &= S + N_{k-1} + \underbrace{V_k + [U_k, S]}_{\text{termes d'ordre } k} + \underbrace{R_{k+1} + [U_k, N_{k-1}] + [U_k, V_k] + [U_k, R_{k+1}] + \dots}_{\text{termes d'ordres supérieurs à } k+1}\end{aligned}$$

Ainsi, on doit trouver U_k tel que :

$$N_{k-1} + V_k + [U_k, S] = N_k, \text{ où } N_k \text{ est le normalisé de } X \text{ à l'ordre } k$$

Par exemple, dans le cas où V_k n'est constitué d'aucun monôme résonant l'équation à résoudre est :

$$[S, U_k] = V_k \tag{11}$$

Pour résoudre l'équation (11), on écrit : $S = S_0 + S_\lambda$ où $S_0 = z\frac{\partial}{\partial z}$ et $S_\lambda = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda z \frac{\partial}{\partial z}$ est l'hamiltonien de $h(x,z) = \lambda xz$ et on note V_k comme le champ hamiltonien d'un polynôme homogène v de degré $k+1$: $V_k = H_v$. Alors :

$$[S, U_k] = [S_0, U_k] + [S_\lambda, U_k] = [z\frac{\partial}{\partial z}, U_k] + H_{\{h,u\}} = H_v$$

où $H_{\{h,u\}}$ est l'hamiltonien de la fonction $\{h,u\}$ qui est le crochet de poisson de h et de u. Or :

$$[z\frac{\partial}{\partial z}, U_k] = \left(z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-z\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

et ce champ de vecteurs est l'hamiltonien de la fonction $z\frac{\partial u}{\partial z} - u$. Par conséquent, résoudre (11) revient à trouver une fonction u qui vérifie :

$$\{h,u\} + z\frac{\partial u}{\partial z} - u = v$$

De plus, $\{h,u\} = \lambda x \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda z \frac{\partial u}{\partial z} = \mathcal{L}_{S_\lambda}(u)$, donc on résout :

$$\mathcal{L}_S(u) - u = \lambda x \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\lambda) z \frac{\partial u}{\partial z} - u = v$$

$$\text{On pose alors : } v(x,z) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=k+1} b_{ij} x^i z^j$$

$$\text{et on cherche : } u(x,z) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=k+1} a_{ij} x^i z^j$$

On résout et on trouve :

$$(\lambda i + (1-\lambda)j - 1) \cdot a_{ij} = b_{ij}$$

L'équation $\lambda i + (1-\lambda)j = 1$, est une condition de résonance du monôme $x^i z^j$. Nous étudierons plus généralement cette condition en dimension supérieure en dernière section. Lorsque (i,j) ne correspond pas à un monôme résonant on prend :

$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{(\lambda i + (1-\lambda)j - 1)} \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ sinon.}$$

On a donc repoussé l'ordre de la normalisation :

$$\varphi_k^* X = S + N_k + R'_{k+1}$$

avec φ_k symplectique.

On procède ainsi à tout ordre. C'est possible, puisque comme φ_k est symplectique ${\varphi_k}^* X$ sera liouvillien, ce qui implique que V_{k+1} est hamiltonien. En effet :

Pour tout champ liouvillien Y quelconque, le champ $Y - z\frac{\partial}{\partial z}$ est hamiltonien (la dérivée de Lie de $\omega = dx \wedge dz$ par rapport à ce champ est nulle), autrement dit la "composante liouvillienne" de ${\varphi_k}^* X$ est dans la partie linéaire, par conséquent V_{k+1} est hamiltonien.

On peut alors répéter le processus et on obtient :

$$\Phi = lim_{k\to\infty}\Phi_k, \text{ où } \Phi_k = \varphi_k \circ \Phi_{k-1} \text{ pour tout } k \geqslant 3, \text{ et } \Phi_2 = \varphi_2.$$

Φ est alors un difféomorphisme formel et symplectique, qui normalise le champ X. □

3. Domaine de Poincaré

Ici, nous donnons un résultat de normalisation d'équation différentielle implicites au voisinage d'un point singulier, dans le cas où l'invariant dynamique χ n'est pas un réel négatif.

Théorème 3.1. — *On considère une équation de la forme (9) :*

$$(E) \ : \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + ...$$

où "..." désigne des termes d'ordres supérieurs en x et y'.

I. *Lorsque $\chi \notin \mathbb{R}$ (i.e. $\lambda \notin \mathbb{R}$) on a :*

$$(E) \ \sim \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

II. *Si* $\chi \in]\frac{1}{4}, +\infty[$ *(i.e.* $\mathcal{R}e(\lambda) = \mathcal{R}e(1-\lambda) = \frac{1}{2}$*), alors :*

$$(E) \ \sim \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

III. *Et lorsque* $\chi \in]0, \frac{1}{4}[$ *(i.e.* $\lambda \in]0,1[$*), deux cas se présentent :*

a) $\forall q \in \mathbb{N}, q > 2, \chi \neq \frac{q-1}{q^2}$ *implique :*

$$(E) \ \sim \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

b) *Mais s'il existe* $q \in \mathbb{N}, q > 2$ *tel que* $\chi = \frac{q-1}{q^2}$*, alors :*

$$(E) \ \sim \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

$$\text{ou bien } (E) \ \sim \ y = \frac{1}{q}xy' + x^q \ \sim \ y = \frac{q-1}{q}xy' + y'^q$$

$$\sim \ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + \left(\frac{q-1}{q}x - y'\right)^q$$

On sait déjà que (E) est équivalente à une équation de la forme (10). Pour démontrer ce théorème, on va normaliser (voire linéariser) symplectiquement le champ liouvillien $X = S + R$ associé.

Lemme 3.2. — *Lorsque le couple* $(\lambda, 1-\lambda)$ *appartient au domaine de Poincaré (i.e. le segment reliant les points d'affixes* λ *et* $(1-\lambda)$ *ne contient pas l'orgine), et qu'il n'y a aucune résonance, le champ de vecteurs liouvillien* X *est symplectiquement et holomorphiquement linéarisable.*

Démonstration. — D'après le théorème de Poincaré (voir [1]), le champ X est holomorphiquement linéarisable au voisinage de zéro. Bien que le difféomorphisme linéarisant ne soit à priori pas symplectique, il est néanmoins déterminé de manière unique car il n'y a pas de résonance ! Par conséquent, cette transformation holomorphe et le symplectomorphisme formel de la proposition (2.2) sont égaux. Ainsi ce changement de variable est non seulement convergent mais également symplectique. □

Étude des relations de résonance. Écrivons les relations de résonances possibles avec $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, q_1 + q_2 \geqslant 2$:

$$R_1 \ : \ q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = \lambda \iff (q_1 - 1 - q_2)\lambda = -q_2 \tag{12}$$

$$\text{et } R_2 \ : \ q_1\lambda + q_2(1-\lambda) = (1-\lambda) \iff (q_1 + 1 - q_2)\lambda = 1 - q_2 \tag{13}$$

On voit alors que si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, il n'y a pas de résonance. De plus, le segment reliant les points d'affixes λ et $(1-\lambda)$ a pour milieu le point d'affixe $\frac{1}{2}$, donc dans les cas I et II du théorème le couple $(\lambda, 1-\lambda)$ appartient au domaine de Poincaré. Ainsi, d'après le lemme 3.2, X est symplectiquement linéarisable, ce qui démontre les points I et II du théorème.

Si en revanche λ est rationnel il peut y avoir des résonances : Posons $\lambda = \frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux et $q > 0$; alors :

$$R_1 \iff \begin{cases} q_1 = 1 + k(p-q) \\ q_2 = kp \end{cases} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\text{et } R_2 \iff \begin{cases} q_1 = k(p-q) \\ q_2 = 1 + kp \end{cases} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}^*$$

avec $q_1 + q_2 = 1 + k(2p - q) \geqslant 2$. Lorsque $\lambda \in]0, 1[$ on a alors $q > p > 0$.

Pour la relation R_1 : $q_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 0$ et $q_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow q - \frac{1}{k} \leqslant p \leqslant q - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant 1$, donc $k = 1$. Mais alors $p = q - 1$. Donc si $p \neq (q-1)$ il n'y a pas de résonance. Et si $p = (q-1)$ (i.e. $\chi = \frac{(q-1)}{q^2}$), alors R_1 admet comme solution : $q_1 = 0, q_2 = (q-1)$.

Pour la relation R_2 : $q_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \leqslant 0$ et $q_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow p \leqslant -\frac{1}{k} \leqslant 1$, donc $k = 1$, et $p = 1$. Donc si $p \neq 1$ il n'y a pas de résonance. Et si $p = 1$ (i.e. $\chi = \frac{(q-1)}{q^2}$), alors R_2 admet comme solution : $q_1 = (q-1), q_2 = 0$.

Or comme $\lambda \neq \frac{1}{2}$, p ne peut pas valoir simultanément 1 et $(q-1)$.

Si $\lambda = \frac{q-1}{q}$ (cas où R_1 a une solution) alors d'après le théorème de Poincaré X se normalise en un champ de type :

$$\left(\lambda x + A \cdot z^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial x} + (1-\lambda) z \frac{\partial}{\partial z}$$

et si $\lambda = \frac{1}{q}$ (cas où R_2 a une solution) alors X se normalise en un champ de type :

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda) z + A' \cdot x^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

où A et A' sont des constantes complexes.

Remarque. On peut passer de l'une de ces formes normales à l'autre (en conservant la valeur de la constante, i.e. $A = A'$) par une transformation symplectique de Legendre $(X = -z, Z = x)$, ce qui fait passer du cas $\lambda = \frac{1}{q}$ au cas $\lambda = \frac{q-1}{q}$ en échangeant les variables x et z.

Ainsi les équations correspondantes $y = \frac{1}{q} x y' + x^q$ et $y = \frac{q-1}{q} x y' + y'^q$ sont équivalentes via la transformation de Legendre $(X = -z,\ Y = y - xz,\ Z = x)$.

Fin de la preuve. L'étude des résonances montre alors que, lorsque pour tout $q \in \mathbb{N}, q > 2$, $\chi \neq \frac{(q-1)}{q^2}$ alors $\lambda \neq \frac{1}{q}$ et $\lambda \neq \frac{q-1}{q}$, et du coup il n'y a aucune résonance, et d'après le lemme 3.2, on a prouvé le point III.a) du théorème.

Par contre s'il existe un $q \in \mathbb{N}, q \geqslant 2$, tel que $\chi = \frac{(q-1)}{q^2}$, alors on ne peut plus appliquer le lemme 3.2 car il y a une résonance. Dans ce cas soit $\lambda = \frac{1}{q}$ soit $\lambda = \frac{q-1}{q}$, mais d'après la remarque précédente, quitte à appliquer une transformation symplectique de Legendre, on peut supposer que $\lambda = \frac{1}{q}$.

D'après la proposition 2.2 le champ X est formellement normalisable par un difféomorphisme formel $\hat{\psi}$ symplectique. D'un autre coté d'après le théorème de Poincaré, X est normalisable par un changement de variable holomorphe φ. Par conséquent le difféomorphisme formel $u := \hat{\psi} \circ \varphi^{-1}$ est tangent à l'identité en zéro et envoie une forme normale sur une autre. Il est donc de la forme :

$$X = x,\ Z = z + Bx^{q-1}$$

où B est une constance complexe. Or u est holomorphe et symplectique puisque $dX \wedge dZ = dx \wedge dz$. Dans un premier temps cela montre que $\hat{\psi} = u \circ \varphi$ converge, c'est donc une transformation holomorphe, on peut alors la noter ψ. Et dans un second temps on en déduit que le difféomorphisme $\varphi = u^{-1} \circ \psi$ est symplectique.

Ainsi, le champ X est symplectiquement et holomorphiquement normalisable en un champ de la forme :

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + A \cdot x^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

où A est une constance complexe. Si A est nulle, alors le champs X est symplectiquement et holomorphiquement linéarisable. Ainsi l'équation de départ (E) est équivalente à l'équation (7).

Et si A est non nulle on peut alors transformer ce champ afin que la constante soit égale à q. En effet, il suffit d'appliquer au champ précédent le changement de variable suivant :

$$\varphi(x,z) = (X,Z) = (Cx, C^{-1}z) \text{ avec } C = \left(\frac{A}{q}\right)^{1/q}.$$

On a alors démontré que le champ X se normalise symplectiquement et holomorphiquement en le champ :

$$\lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda)z + q \cdot x^{q-1}\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

Or l'équation différentielle implicite qui correspond au champ précédent est :

$$y = \lambda x y' + x^q$$

et en appliquant un changement de variable Ψ_λ vu précédemment, pour $\lambda = \frac{1}{q}$ on trouve :

$$Y = \frac{1}{2}(Y'^2 + \chi X^2) + \left(\frac{q-1}{q}X - Y'\right)^q .$$

Ce qui démontre le point III.b) du théorème.

4. Domaine de Siegel

Nous allons à présent donner un résultat, dans le cas où l'invariant dynamique χ est un réel négatif.

4.1. Cas non-résonnant

Théorème 4.1. — *On se place dans le même contexte que le théorème 3.1 : On considère une équation de la forme (9) :*

$$(E)\ :\ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + ...$$

où "..." désigne des termes d'ordres supérieurs en x et y'.

On suppose que :

i) $\chi < 0$ *(i.e. $\lambda \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$).*

ii) *Il existe $\nu > 2,\ c > 0$ tels que pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{N}, q_1 + q_2 \geqslant 3$, on a :*

$$|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - 1| > \frac{C}{(q_1+q_2)^\nu}$$

Alors :

$$(E)\ \sim\ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

Remarque. L'hypothèse (ii) est une condition diophantienne sur les petits diviseurs et implique qu'il y a pas de résonance. Elle est équivalente à la condition diophantienne de Siegel sur les petits diviseurs du champ X associé :

Il existe $\nu > 2,\ c > 0$ tels que pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{N}, q_1 + q_2 \geqslant 2$, on a : $|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - \lambda| > \frac{C}{(q_1+q_2)^\nu}$ et $|q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - (1-\lambda)| > \frac{C}{(q_1+q_2)^\nu}$.

Sous cette condition, λ n'est pas rationnel ce qui équivaut à dire que pour tout $p, q \in \mathbb{N}, p+q \geqslant 2, p > q > 0$, on a : $\chi \neq \frac{p(q-p)}{q^2}$.

Démonstration. — D'après l'étude des relations de résonance qui précède, il n'y a aucune résonance si $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Or d'après la condition (ii) et la remarque, λ ne peut pas être rationnel. Le champ X est donc formellement linéarisable. Pour avoir la convergence, on utilise un théorème de Siegel :

Théorème 4.2 (Siegel : [11]). — *Si le couple* $(\lambda, 1-\lambda)$ *vérifie la condition diophantienne de Siegel alors le champ* X *est holomorphiquement linéarisable.*

Comme il n'y a aucune résonance, ce difféomorphisme linéarisant est unique. Il est par conséquent égal au difféomorphisme symplectique à priori formel de la proposition 2.2. Il est donc holomorphe et symplectique. Ainsi, le champ X est holomorphiquement et symplectiquement linéarisable, ce qui démontre le théorème 4.1. □

Il existe une condition plus faible que la condition diophantienne de Siegel, c'est la condition (ω) de Brjuno que nous verrons plus loin.

4.2. La méthode des chemins

Proposition 4.3. — *Soient* X *et* X' *deux germes champs de vecteurs liouvilliens et holomorphes sur* $(\mathbb{C}^n, 0)$*, conjugués l'un de l'autre par un difféomorphisme* h *holomorphe et tangent à l'identité en zéro. Alors,* X *et* X' *sont symplectiquement conjugués.*

La démonstration est empruntée à Marc Chaperon [5]. Elle utilise la méthode de Moser, une méthode générale utilisée pour fabriquer des changements de variables en intégrant des équations différentielles qui dépendent d'un paramètre d'isotopie.

Démonstration. — On pose $X = h^*X'$, et ω_0 la forme symplectique standard. Comme X et X' sont liouvilliens on a alors : $\mathcal{L}_X\omega_0 = \mathcal{L}_{X'}\omega_0 = \omega_0$. On pose $\omega_1 := h^*\omega_0$ et $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. On cherche une famille de difféomorphisme $(g_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ telle que pour tout $t \in [0,1]$:

$$(1)\ :\ g_t^*X = X \text{ et } (2)\ :\ g_t^*\omega_t = \omega_0.$$

On pose $G_t := \left(\frac{d}{dt}g_t\right) \circ g_t^{-1}$. Alors on a :

$$(1) \iff \mathcal{L}_{G_t}X = 0 \text{ et}$$

$$(2) \iff \frac{d}{dt}(g_t^*\omega_t) = 0 = g_t^*\left(\mathcal{L}_{G_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right)$$

Or d'après la formule de Cartan, pour tout champ de vecteur Y on a :

$$\mathcal{L}_Y = di_Y + i_Y d$$

On applique cette formule au champ G_t et comme pour tout t la forme ω_t est fermée on a : $\mathcal{L}_{G_t}\omega_t = d(i_{G_t}\omega_t)$ et $\frac{d}{dt}\omega_t = \omega_1 - \omega_0$. On pose $\beta = \omega_1 - \omega_0$ et on a :

$$\mathcal{L}_X\beta = \mathcal{L}_X\omega_1 - \mathcal{L}_X\omega_0 = \mathcal{L}_X(h^*\omega_0) - \omega_0 \text{ car } X \text{ est liouvillien}$$
$$= h^*\left(\mathcal{L}_{h_*X}\omega_0\right) - \omega_0 = h^*\left(\mathcal{L}_{X'}\omega_0\right) - \omega_0 = h^*\omega_0 - \omega_0 \text{ car } X' \text{ est liouvillien}$$
$$\text{donc } \mathcal{L}_X\beta = \beta$$

On applique la formule de Cartan pour le champ X et comme β est également fermée, on en déduit que $\beta = d(i_X\beta)$ et que $\mathcal{L}_X\omega_t = \omega_t$.

Pour résoudre (2) il suffit de résoudre :

$$i_{G_t}\omega_t + i_X\beta = 0$$

Or $i_X\beta$ est une forme différentielle et pour tout t, $\tilde{\omega_t}\ : TM \to T^*M, X \mapsto i_X\omega_t$ est un isomorphisme car la forme ω_t est non dégénérée. On obtient une solution pour (2) et on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(i_{G_t}\omega_t) &= -\mathcal{L}_X(i_X\beta)\\ &= i_{\mathcal{L}_XG_t}\mathcal{L}_X\omega_t = -i_{(\mathcal{L}_XX)}\beta = 0\\ &= i_{\mathcal{L}_XG_t}\omega_t = 0, \text{ car } \mathcal{L}_X\omega_t = \omega_t\end{aligned}$$

Or ω_t étant une forme non-dégénérée on en déduit que :

$$-\mathcal{L}_XG_t = 0 = -[X, G_t] = \mathcal{L}_{G_t}X = 0$$

On a trouvé une famille de difféomorphisme satisfaisant les équations (1) et (2).

On peut ainsi définir $\varphi := h \circ g_1$, et on a : par (1), $X = \varphi^*X'$ et par (2) : $\varphi^*\omega_0 = g_1^*(h^*\omega_0) = g_1^*\omega_1 = \omega_0$. Ainsi les champs X et X' sont conjugués l'un de l'autre par le difféomorphisme symplectique φ.

□

4.3. Cas résonnant

Étude des résonances. On se place dans le cas résonnant où $\lambda = \frac{p}{q}$, avec $p \geqslant q > 0$, on a donc $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$. Le cas où $\lambda \leqslant 0$, est analogue, on peut même s'y ramener par une transformation de Legendre échangeant x et z ainsi que λ et $(1-\lambda)$.

On considère à nouveau les relations (R_1) et (R_2) (équations (12) et (13)) : Comme $p \geqslant q > 0$ on a $2p - q \geqslant p \geqslant 1$, d'où :

$$q_1 + q_2 \geqslant 2 \Longleftrightarrow k \geqslant \frac{1}{2p-q} \Longleftrightarrow k \geqslant 1.$$

Par conséquent cette fois-ci (R_1) et (R_2) admettent des solutions pour $k \in \mathbb{N}^*$. Le champ X se normalise donc formellement en une forme normale de type :

$$NF = \big(\lambda x + xf(x^{p-q}z^p)\big)\frac{\partial}{\partial x} + \big((1-\lambda)z + zg(x^{p-q}z^p)\big)\frac{\partial}{\partial z} \tag{14}$$

où f et g sont des séries formelles à une variable, nulles en zéro.

Lorsque $\lambda \neq 1$ alors, on peut écrire NF sous la forme :

$$NF = \big(\lambda x F(x^{p-q}z^p)\big)\frac{\partial}{\partial x} + \big((1-\lambda)zG(x^{p-q}z^p)\big)\frac{\partial}{\partial z}$$

où F et G sont des séries formelles à une variable qui valent 1 en zéro.

Dorénavant et par commodité, on notera le monôme résonant

$$t := x^{p-q}z^p.$$

Étude des petits diviseurs. Les petits diviseurs prennent la forme suivante :

$$q_1\lambda + q_2(1-\lambda) - 1$$

pour $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^2, q_1 + q_2 \geqslant 3$. Or ces éléments sont tous contenus dans l'ensemble $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$, qui est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Or, comme λ est rationnel il n'est pas dense mais de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, il n'y a pas de petit diviseur au voisinage de zéro. Par conséquent la condition (ω) de Brjuno est automatiquement vérifiée :

$$(\omega)\ \ -\sum_{k\geqslant 0}\frac{\ln(\omega_k)}{2^k} < +\infty$$

où $\omega_k = \inf\limits_{(q_1,q_2)\in\mathbb{N}^2, 3\leqslant q_1+q_2\leqslant 1+2^k}\{|q_1\lambda+q_2(1-\lambda)-1|,\ q_1\lambda+q_2(1-\lambda)-1 \neq 0\}$.

4.4. Normalisation dans le cas intégrable

Théorème 4.4. — *On considère une équation de la forme (9) :*

$$(E)\ :\ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2) + \ldots$$

avec $\lambda = \frac{p}{q}$, $p \geqslant q > 0$, $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$. *Le champ liouvillien X associé à (E) se normalise donc formellement en une forme normale de type (14) notée NF.*

Si $\mathcal{L}_{NF}(t) = 0$, i.e. t est une intégrale première de NF. $(*)$

Alors :

$$(E)\ \sim\ y = \frac{1}{2}(y'^2 + \chi x^2)$$

Remarque 1. Si on écrit :

$$NF = \left(\lambda x + x \sum_{k\geqslant 1} a_k t^k\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left((1-\lambda) z + z \sum_{k\geqslant 1} b_k t^k\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

l'hypothèse $(*)$ est équivalente à : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (p-q)\cdot a_k + p \cdot b_k = 0$, ce qui revient à dire que la forme normale NF est de la forme $\hat{a}\cdot S$, où $\hat{a}$ est une série formelle en t et valant 1 en zéro.

En effet : $(*) \iff \forall k \geqslant 1,\ \lambda b_k = (1-\lambda) a_k$. Dans le cas où $\lambda = 1$, on a $t = z$ et dans ce cas :

$$\mathcal{L}_{NF}(z) = 0 \iff \forall k \geqslant 1, b_k = 0$$

Et on a bien $NF = \hat{a}(z)\cdot S$ avec $\hat{a}(z) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} a_k z^k$.

Si $\lambda \neq 1$ alors on a $\frac{a_k}{\lambda} = \frac{b_k}{(1-\lambda)}$ et :

$$NF = \lambda x \left(1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_k}{\lambda} t^k\right) \frac{\partial}{\partial x} + (1-\lambda) z \left(1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{b_k}{(1-\lambda)} t^k\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

On en déduit alors que $NF = \hat{a}(t)\cdot S$ avec :

$$\hat{a}(t) = \left(1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_k}{\lambda} t^k\right) = \left(1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{b_k}{(1-\lambda)} t^k\right)$$

Remarque 2. Si X admet une forme normale de la forme $NF = \hat{a}\cdot S$, alors toutes les formes normales de X sont de cette forme.

En effet : Si NF' est une autre forme normale de X, alors il existe un difféomorphisme tangent à l'identité de la forme $\exp(U)$ tel que $[S, U] = 0$ et $NF' = \exp(U)^* NF$. Or :

$$\begin{aligned}
\exp(U)^* NF &= NF + [U, NF] + [U,[U,NF]] + ... \\
&= \hat{a}\cdot S + [U, \hat{a}\cdot S] + [U,[U,\hat{a}\cdot S]] + ... \\
&= \hat{a}\cdot S + \hat{a}\cdot \underbrace{[U,S]}_{=\,0} + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot S + [U, \hat{a}\cdot \underbrace{[U,S]}_{=\,0} + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot S] + ... \\
&= \hat{a}\cdot S + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot S + \mathcal{L}_U(\hat{a})\cdot \underbrace{[U,S]}_{=\,0} + \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_U(\hat{a}))\cdot S + ... \\
&= (\hat{a} + \mathcal{L}_U(\hat{a}) + \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_U(\hat{a})) + ...)\cdot S
\end{aligned}$$

Or $(\hat{a} + \mathcal{L}_U(\hat{a}) + \mathcal{L}_U(\mathcal{L}_U(\hat{a})) + ...)$ est bien une série formelle en t qui vaut 1 en zéro.

Revenons à la preuve du théorème 4.4.

Démonstration. — Pour démontrer la convergence de la normalisation dans le cas du théorème 4.4, on va utiliser le théorème de Brjuno :

Théorème 4.5 (Brjuno : [2]). — *Si X se normalise formellement en une forme normale de type $\hat{a} \cdot S$, et si $(\lambda, 1-\lambda)$ vérifient la condition (ω) de Brjuno, alors X est holomorphiquement normalisable.*

De plus, d'après la proposition 2.2, le champ X est symplectiquement et formellement normalisable en une forme normale liouvillienne de la forme $\hat{f} \cdot S$. Or si une telle forme normale est liouvillienne, alors $\hat{f} = 1$. En effet si on note ω_0 la forme symplectique santard :

$$\omega_0 = \mathcal{L}_{\hat{f}.S}\omega_0 = \hat{f} \cdot \mathcal{L}_S\omega_0 + (\mathcal{L}_S\hat{f}) \cdot \omega_0 = \hat{f} \cdot \omega_0$$

puisque, comme $\hat{f}$ est une fonction de t, on a $\mathcal{L}_S\hat{f} = 0$.

Par conséquent, X est formellement linéarisable. Mais dans ce cas, toutes les formes normales sont égales à S. En effet, si NF' est une forme normale alors il existe un difféomorphisme tangent à l'identité en zéro de la forme $(Id + U)$ avec $[S, U] = 0$ tel que :

$$(Id + U)_*S = NF', \text{ or } (Id + U)_*S = S.$$

D'après cette remarque et le Théorème de Brjuno, on en déduit que X est holomorphiquement linéarisable. Mais comme X et S sont tous deux liouvillien, d'après la proposition 4.3, ils sont symplectiquement conjugués. On en déduit que X est symplectiquement et holomorphiquement linéarisable, ce qui démontre le théorème 4.4. □

5. Normalisation dans le cas non-intégrable

5.1. Normalisation formelle

On se place à présent dans le cas où $\mathcal{L}_{NF}(t) \neq 0$. Comme $t = x^{p-q}z^p$, cela équivaut à : $\exists\ m \in \mathbb{N}^*,\ \beta := (p-q) \cdot a_m + p \cdot b_m \neq 0$. On suppose également que m est le plus petit entier qui vérifie cette propriété et on note $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) := (a_m, b_m)$; on écrira aussi $\beta = (p-q) \cdot \alpha_1 + p \cdot \alpha_2 \neq 0$.

Définition. On définit $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes de la forme :

$$(x(\lambda_1 + \alpha_1 t^m) + t^m f_1(x,z))\frac{\partial}{\partial x} + (z(\lambda_2 + \alpha_2 t^m) + t^m f_2(x,z))\frac{\partial}{\partial z}$$

avec$f_1(x,z) = x\tilde{f}_1(x,z)$, $f_2(x,z) = z\tilde{f}_2(x,z)$ et $(p-q)\cdot\tilde{f}_1(x,z) + p\cdot\tilde{f}_2(x,z) = 0$, pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Dans le cas présent de la dimension 2, tout champ de vecteurs 1-résonnant (i.e. lorsque l'ensemble des résonances est engendré par un seul monôme) est analytiquement équivalent à un élément de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ [15]. Cela signifie qu'il est conjugué à un élément de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ à multiplication près d'une fonction unité. L'équivalence analytique assure l'équivalence des feuilletages.

De plus, tout élément $X \in \mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$ se normalise formellement en la forme normale :

$$NF_\alpha = x(\lambda_1 + \alpha_1 t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z(\lambda_2 + \alpha_2 t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

Par conséquent, si on considère un système de la forme :

$$(E)\ :\ \begin{cases} y = g(x,z) = \lambda xz + ... \\ dy - zdx = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda = \frac{p}{q},\ p \geqslant q > 0,\ \chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$ et où X est le champ liouvillien associé à (E), alors il existe un germe de fonction unité f sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $f \cdot X$ soit formellement normalisable sous la forme :

$$NF_\alpha = x(\lambda + \alpha_1 t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z((1-\lambda) + \alpha_2 t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

Celle-ci est liouvillienne si et seulement si :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + m(p-q)\alpha_1 + mp\alpha_2 = 0$$

En effet $\mathcal{L}_{NF_\alpha}\omega = \operatorname{div}(NF_\alpha)\omega$, où div désigne la divergence du champ de vecteur. Donc :

$$\mathcal{L}_{NF_\alpha}\omega = \omega \iff \operatorname{div}(NF_\alpha) = 1$$

$$\iff \frac{\partial(x(\lambda + \alpha_1 t^m))}{\partial x} + \frac{\partial(z((1-\lambda) + \alpha_2 t^m))}{\partial z} = 1$$

$$\iff (\lambda + \alpha_1 t^m) + \alpha_1 m(p-q)t^m + (1-\lambda) + \alpha_2 t^m + mp\alpha_2 t^m = 1$$

$$\iff \alpha_1 + \alpha_2 + m(p-q)\alpha_1 + mp\alpha_2 = 0$$

Si NF_α était bien liouvillienne (et nous verrons qu'il est toujours possible de s'y ramener), le feuilletage caractéristique de l'équation (E) serait alors formellement équivalent à celui du système :

$$\begin{cases} y = xz(\lambda + \gamma t^m) \\ dy - zdx = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Avec $\gamma = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{qm} = \frac{\alpha_1}{(1+pm)} = \frac{-\alpha_2}{(1+(p-q)m)}$.

Malheureusement il n'est pas toujours possible d'avoir une normalisation holomorphe.

Contre-exemple. On considère l'équation :

$$Y = \frac{1}{2}(Y')^2 + (X - Y')^2(Y' + 1)$$

En appliquant la transformation de contact $X = x+z,\ Y = y+\frac{1}{2}z^2,\ Z = z$, (vue dans les sections précédentes avec $\lambda = 0$) on obtient l'équation :

$$y = x^2 y' + x^2$$

On souhaite trouver une transformation de contact de la forme $\Psi(x,y,z) = (X,Y,Z) = (x, y+\varphi(x), z+\varphi'(x))$ avec $\varphi(x) = \sum_{\mathbb{N}^*} \varphi_n x^n$, qui normalise l'équation en la forme normale :

$$Y = X^2 Y'$$

Équation d'ailleurs équivalente à $Y = \frac{1}{2}(Y'^2) + (X - Y')^2 Y'$.

On a alors :

$$y + \varphi(x) = x^2(y' + \varphi'(x))$$

$$\text{donc } x^2 + \varphi(x) = x^2\varphi'(x)$$

Ce qui donne $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -1$ et pour tout $n \geqslant 3, \varphi_n = (n-1)\varphi_{n-1}$. On obtient ainsi la série divergente :

$$\varphi(x) = \sum_{n \geqslant 2} -(n-1)!\ x^n.$$

En revanche, on peut espérer établir des transformations entre l'équation (E) et l'équation (16) qui ne seront pas holomorphes sur un voisinage complet de 0 mais sur des voisinages sectoriels.

5.2. Normalisation sectorielle :

Définition. On définit pour $r, R > 0, \delta \in \mathbb{C}^*$ et $0 \leqslant j \leqslant 2m-1$ un entier :

$$DS_j(r,R,\delta) = \left\{(x,z) \in \mathbb{C}^2 \middle| \left|\arg t - \frac{1}{m}\left(\arg\delta + \pi(j+\frac{1}{2})\right)\right| < \frac{\pi}{m} - \varepsilon\right\}$$

$$\text{avec}, 0 < |t| < r,\ |x| < R,\ |z| < R.$$

Nous allons utiliser un théorème de normalisation sectorielle appliqué au cas de la dimension deux.

Théorème 5.1 (Stolovitch : [15]). — *Soit $0 < \varepsilon < \pi/2m$ fixé et $X \in \mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$.*

On suppose :

(H_1) *Les valeurs propres (λ_1, λ_2) du champ X sont situées sur une droite (d) passant par l'origine.*

(H_2) *Il existe un indice i_0 tel que $\lambda_{i_0} \in (d)$ soit non nul et tel que :*

$$\min_{i \neq i_0} Re\left(\frac{\alpha_i}{\beta} - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \frac{\alpha_{i_0}}{\beta}\right) > 0$$

Alors, pour tout $0 \leqslant j \leqslant 2m-1$, il existe un système de coordonnées locales $(X, Z) = \Phi_j(x, z)$ tangent à l'identité en zéro, holomorphe dans le domaine sectoriel $DS_j(r, R, \delta)$ avec r, R suffisamment petits et $\delta = \delta(\lambda, \beta) \in \mathbb{C}^*$ de module 1, dans lequel le champs X s'écrit

$$X(\lambda_1 + \alpha_1 T^m)\frac{\partial}{\partial X} + Z(\lambda_2 + \alpha_2 T^m)\frac{\partial}{\partial Z}$$

Ce système de coordonnées conserve le monôme résonnant (i.e. $t = T$). Chaque fonction Φ_j admet la fonction $\hat{\Phi}$ comme développement asymptotique en t au sens de Gérard-Sibuya dans $DS_j(r, R, \delta)$ (où $\hat{\Phi}$ est le difféomorphisme formel qui conjugue formellement X à cette forme normale).

L'hypothèse (H_2) de ce théorème, revient dans notre cas à dire que, $\lambda > 0$, or ici $\lambda \geqslant 1$.

Théorème 5.2. — *Sous ces hypothèses et avec les notations précédentes, les feuilletages caractéristiques des systèmes implicites (E) et (16) sont holomorphiquement équivalents sur un voisinage épointé de zéro.*

Pour cela, on va d'abord monter le lemme suivant :

Lemme 5.3. — *Pour toute forme normale NF_α, il existe une forme normale de même forme $NF_{\alpha'}$ mais liouvillienne et telle que, pour tout $0 \leqslant j \leqslant 2m-1$ et pour r et R assez petits, on peut trouver un biholomorphisme Ψ_j du domaine sectoriel $DS_j(r, R, \delta)$ et qui envoie NF_α sur $NF_{\alpha'}$.*

Démonstration. — Étant donnée une forme normale de la forme (14) :

$$NF = (\lambda x + x f(t))\frac{\partial}{\partial x} + ((1-\lambda)z + z g(t))\frac{\partial}{\partial z}$$

où f et g sont des séries formelles nulles en zéro, NF est liouvillienne si et seulement si sa divergence est égale à 1, soit :

$$f(t) + g(t) + (p-q) \cdot t f'(t) + p \cdot t g'(t) = 0 \tag{17}$$

Si NF n'est pas liouvillienne, on va chercher un changement de coordonnées dans lequel elle le sera. On cherche un changement de coordonnées Ψ, tangent à l'identité et tel que $(\Psi^* NF)$ soit encore une forme normale. On va donc chercher Ψ sous la forme : $(X,Z) = (x\exp A(t), z\exp B(t))$, avec $(p-q)A(t)+pB(t) = 0$ pour tout t. On a alors $T := X^{p-q}Z^p = x^{p-q}z^p = t$. Le domaine sectoriel est alors préservé et on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \lambda X + X\cdot(f(t) + tA'(t)\cdot[(p-q)f(t)+pg(t)])\\ \dot{Z} &= (1-\lambda)Z + Z\cdot(g(t) + tB'(t)\cdot[(p-q)f(t)+pg(t)])\end{aligned}$$

Pour que cette nouvelle forme normale soit liouvillienne, il faut et il suffit que la fonction $A(t)$ vérifie une équation différentielle obtenue en appliquant l'équation (17) à cette forme normale et en utilisant la relation $(p-q)A(t)+pB(t) = 0$ pour tout t :

$$[f(t)+g(t)+(p-q)tf'(t)+ptg'(t)] + \frac{1}{\lambda}tA'(t)[(p-q)f(t)+pg(t)] = 0$$

Or la fonction $(p-q)f(t)+pg(t)$ de t, n'est pas identiquement nulle au voisinage de zéro puisque qu'on est dans le cas non-intégrable.

Si on applique l'équation différentielle précédente à la forme normale NF_α, on obtient :

$$t\cdot A'(t) = C \ := -\lambda\frac{(\alpha_1+\alpha_2+m((p-q)\alpha_1+p\alpha_2))}{(p-q)\alpha_1+p\alpha_2}$$

Or, il n'existe pas en général de solution holomorphe au voisinage de zéro, qui vérifie cette équation. En revanche si on pose $A(t) = C\ln_j(t)$, où $\ln_j$ est une détermination du logarithme complexe judicieusement choisie, on obtient une solution $A(t)$ qui est holomorphe dans le domaine sectoriel $DS_j(r,R,\delta)$ et ce pour tout $0\leqslant j\leqslant 2m-1$.

On peut définir une détermination holomorphe du logarithme complexe sur chaque ensemble de la forme : $\mathbb{C}\setminus d(z_0,\vec{u}_\theta)$, où $z_0\in\mathbb{C}$, θ est un nombre complexe de module 1, $\vec{u}_\theta$ est un vecteur d'affixe θ, et où $d(z_0,\theta)$ est la demi-droite d'origine z_0 et dirigée par $\vec{u}_\theta$.

On choisit alors la détermination du logarithme définie sur le plan complexe privé de la demi-droite d'origine 0 et dirigée par le vecteur d'affixe :

$$e^{i\left(\pi+\frac{1}{m}\left(\arg\delta+\pi(j+\frac{1}{2})\right)\right)}.$$

On aura ainsi un logarithme complexe $\ln_j$ holomorphe sur le domaine sectoriel $DS_j(r,R,\delta)$ et on aura donc une solution à l'équation différentielle précédente. On obtient donc un difféomorphisme Ψ_j holomorphe sur $DS_j(r,R,\delta)$ qui envoie NF_α sur $NF_{\alpha'}$.

Le difféomorphisme ainsi obtenu est alors de la forme :

$$\Psi_j(x,z) = (xt^a, zt^b)$$

où $a := C$, où b est tel que $(p-q)a+pb=0$ et où le logarithme choisi pour écrire les fonctions puissances étant $\ln_j$. Et étant donnée :

$$NF_\alpha = x(\lambda+\alpha_1 t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z((1-\lambda)+\alpha_2 t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

la forme normale $NF_{\alpha'} := {\Psi_j}_* NF_\alpha$ est alors égale à :

$$NF_{\alpha'} = x(\lambda+[\alpha_1+a\beta]t^m)\frac{\partial}{\partial x} + z((1-\lambda)+[\alpha_2+b\beta]t^m)\frac{\partial}{\partial z}$$

Cette forme normale est liouvillienne si et seulement si

$$\alpha_1' + \alpha_2' + m((p-q)\alpha_1' + p\alpha_2') = 0$$

où $\alpha_1' := \alpha_1 + a\beta$ et $\alpha_2' := \alpha_2 + b\beta$. Et cette dernière égalité se prouve en écrivant que :

$$a = C = -\lambda\frac{(\alpha_1+\alpha_2+m\beta)}{\beta}$$

De plus, la forme normale $NF_{\alpha'}$ ne dépend pas de l'entier j. Ce qui achève la démonstration du lemme. □

Preuve du théorème 5.2. Le champ X est analytiquement équivalent à un champ de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$, autrement dit il existe une fonction unité f telle que $f\cdot X$ soit conjugué à un élément de $\mathcal{E}_{m,\lambda,\alpha}$. Et pour tout difféomorphisme Φ_j obtenu par le théorème de normalisation sectoriel, on peut le composer par un autre difféomorphisme Ψ_j obtenu par le lemme, pour conjuguer holomorphiquement le champ $f\cdot X$ à une forme normale liouvillienne NF_α sur le domaine sectoriel $DS_j(r,R,\delta)$. Or les champs $f\cdot X$ et X ont le même feuilletage.

Ainsi les feuilletages des champs liouvilliens X et NF_α sont alors holomorphiquement équivalents sur $DS_j(r,R,\delta)$ et ce pour tout j. Si on se donne deux difféomorphismes Φ_j et Φ_k définis respectivement sur $DS_j(r,R,\delta)$ et $DS_k(r,R,\delta)$ alors le difféomorphisme $\Phi_j\circ\Phi_k^{-1}$ laisse le feuilletage invariant sur $DS_j(r,R,\delta)\cap DS_j(r,R,\delta)$.

L'ensemble des couples $(\Phi_j, DS_j(r,R,\delta)$, est alors un atlas sur un voisinage épointé de zéro, qui permet de lire le feuilletage de X sur celui de NF_α. Ainsi sur tout ce voisinage épointé de zéro, les feuilletages de X et de NF_α sont alors équivalents.

On se ramène aux surfaces où vivent les 1-jets des solutions en utilisant les cartes $(x,z)\mapsto(x,g(x,z),z)$ et $(x,z)\mapsto(x,xz(\lambda+\gamma t^m),z)$, et on établit l'équivalence des feuilletages caractéristiques des équations (E) et (16), sur un voisinage épointé de zéro. Ce qui prouve le théorème 5.2.

6. Dimension supérieure

6.1. Étude au voisinage d'un point singulier

On considère une équation de la forme :

$$F(x_1, ..., x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0$$

avec $n \geqslant 2$ et F une fonction sur $\mathbb{C}^{2n+1}$ à valeurs complexes. Ou encore :

$$\begin{cases} F(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) = 0 \\ \\ \Omega := dy - \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i = 0. \end{cases} \tag{17}$$

On note S la surface de $\mathbb{C}^{2n+1}$ d'équation $F(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) = 0$. On se place au voisinage d'un point p de S où le plan tangent T_pS coïncide avec l'hyperplan de contact $\ker(\Omega(p))$, c'est à dire :

$$dF(p) \wedge \Omega(p) = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) z_i \right) dx_i \wedge dy + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j} \left(z_i \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

De plus, comme l'hyperplan $\ker(\Omega(p))$ contient toutes les directions $\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ on a alors $\frac{\partial F}{\partial z_i}(p) = 0$ pour tout i.

Certaines transformations de contact permettent de simplifier ces équations :

Transformations de Legendre. Il est possible d'échanger x_i et z_i pour n'importe quel i en utilisant des applications de Legendre. Par exemple si on souhaite échanger les variables x_j et z_j pour j appartenant à un sous-ensemble J de $\{1, ..., n\}$ on utlisera l'application :

$$L_J \ : (x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) \mapsto (X_1, ..., X_n, Y, Z_1, ..., Z_n)$$

où $X_j = \begin{cases} -z_j \text{ si } j \in J \\ x_j \text{ sinon} \end{cases}$, $Y = y - \sum_{j \in J} z_j x_j$, et $Z_j = \begin{cases} x_j \text{ si } j \in J \\ z_j \text{ sinon} \end{cases}$

On peut vérifier que ces applications sont bien des transformations de contact.

Translation. Pour tout point $p : (x_1(p), ..., x_n(p), y(p), z_1(p), ..., z_n(p))$, on définit l'application $(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) \mapsto (X_1, ..., X_n, Y, Z_1, ..., Z_n)$ où pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$X_j = x_j - x_j(p),\ Y = y - y(p) - \sum_{k=1}^{n} z_k(p)(x_k - x_k(p)),\ Z_j = z_j - z_j(p).$$

On peut ainsi se ramener en 0 et dans ce cas les équations du point p deviennent :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(0) = 0,\ \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Si on suppose que 0 n'est pas un point critique de F on a alors $\frac{\partial F}{\partial y}(0) \neq 0$ et d'après le théorème des fonctions implicites le système (17) se réécrit :

$$\begin{cases} y = g(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_n) \\ \\ \Omega := dy - \sum_{i=1}^{n} z_i dx_i = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Mais alors $\Omega = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_k} - z_k\right) dx_k + \frac{\partial g}{\partial z_k} dz_k$. On définit donc le champs de vecteurs liouvillien :

$$X := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial x_k} + \left(z_k - \frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial z_k}$$

Ce champ est somme du champ liouvillien $S_0 = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ et du champ hamiltonien X_g de la fonction g.

La proposition suivante est une adaptation du résultat de Manouchehri (proposition 1.1) en dimension supérieure. Elle se démontre de manière analogue.

Proposition 6.1. — *On considère deux germes d'équations :*

$$\begin{cases} S_1 \ : y = g_1(x, z) \\ dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} S_2 \ : Y = g_2(X, Z) \\ dY - \sum_{k=1}^{n} Z_k dX_k = 0 \end{cases}$$

dont on déduit les germes de champs de vecteurs liouvilliens X_1 et X_2 correspondants.

Soit Φ un germe de biholomorphisme de contact de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui envoie le germe de surface $(S_1, 0)$ sur le germe de surface $(S_2, 0)$ et qui préserve la forme de contact $\Omega = dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k$. Alors $\varphi := \pi_* \Phi|_{S_1}$ (où π est la projection de $\mathbb{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{C}^{2n}$, $(x_1, ..., x_n, y, z_1, ..., z_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, z_1, ...z_n)$) est un germe de biholomorphisme symplectique de $\mathbb{C}^{2n}$ qui envoie X_1 sur X_2.

Réciproquement, tout germe de difféomorphisme symplectique φ de $\mathbb{C}^{2n}$ qui envoie le champ X_1 sur le champ X_2 se relève par π en un unique germe *de difféomorphisme Φ de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui non seulement envoie $(S_1,0)$ sur $(S_2,0)$ mais aussi qui préserve la forme de contact Ω.*

On suppose que la partie linéaire de X est diagonalisable. Dans ce cas le champ X est conjugué à un champ de la forme $S+R_h$ où R_h est le champ hamiltonien d'une fonction h d'ordre supérieure ou égal à 3 et :

$$S=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\frac{\partial}{\partial x_k}+(1-\lambda_k)z_k\frac{\partial}{\partial z_k}$$

où les $\lambda_1,...,\lambda_n,(1-\lambda_1),...,(1-\lambda_n)$ sont les valeurs propres de la partie linéaire de X, toutes différentes de $\frac{1}{2}$. Et d'après la proposition (4.3), X est même symplectiquement conjugué à $S+R_h$ dont l'équation correspondante est :

$$\begin{cases} y=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k z_k+h(x,z) \\ \\ \Omega=dy-\sum_{k=1}^{n}z_k dx_k=0 \end{cases}\tag{19}$$

D'après la proposition (6.1), on en déduit que le système (18) est équivalent au système (19) lui même équivalent à un système de la forme :

$$\begin{cases} y=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(z_k^2+\chi_k x_k^2)+... \\ \\ \Omega=dy-\sum_{k=1}^{n}z_k dx_k=0 \end{cases}\tag{20}$$

où "..." désigne des termes d'ordre supérieurs à trois. Il suffit d'appliquer la transformation :

$$\begin{aligned} X_i&=\tfrac{1}{1-2\lambda_i}\cdot x_i+z_i\\ Y&=y+\textstyle\sum_{k=1}^{n}\tfrac{\lambda_k}{2(1-2\lambda_k)^2}\cdot x_k^2+\tfrac{\lambda_k}{1-2\lambda_k}\cdot x_k z_k+\tfrac{1-\lambda_k}{2}\cdot z_k^2\\ Z_i&=\tfrac{\lambda_i}{1-2\lambda_i}\cdot x_i+(1-\lambda_i)\cdot z_i \end{aligned}$$

Les $\chi_k=\lambda_k(1-\lambda_k)$ sont appelés les *invariants dynamiques* de l'équation.

6.2. Formes normales

On note S_λ le champ de vecteur suivant :

$$S_\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\lambda_i z_i\frac{\partial}{\partial z_i}$$

Et on a $S=S_0+S_\lambda$ ou S_0 est le champ liouvillien $\sum_{i=1}^{n}z_i\frac{\partial}{\partial z_i}$.

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs liouvilliens est un champ de vecteurs hamiltonien (car $\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega=\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\omega-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\omega=\omega-\omega=0$). Plus précisément :

Lemme 6.2. — *Si on se donne deux champs liouvilliens :*

$$X_1 := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial x_k} + \left(z_k - \frac{\partial g}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial z_k} = S_0 + H_g$$

$$\text{et } X_2 := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial x_k} + \left(z_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial z_k} = S_0 + H_h$$

alors le crochet de Lie $[X_1, X_2]$ *est le champ hamiltonien de la fonction :*

$$\{g,h\} + (g-h) - \mathcal{L}_{S_0}(g-h)$$

Démonstration. — Tout d'abord on a : $[X_1, X_2] = [S_0, H_{h-g}] + H_{\{g,h\}}$. Calculons le premier terme :

$$\begin{aligned} &= [H_{g-h}, S_0] = \sum_{i=1}^{n}[H_{g-h}, z_i\frac{\partial}{\partial z_i}] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(z_i \underbrace{\left[H_{g-h}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right]}_{=:A_i} + \underbrace{\mathcal{L}_{H_{g-h}}(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i}}_{=:B_i} \right) \end{aligned}$$

Calculons d'abord B_i :

$$B_i = \mathcal{L}_{H_{g-h}}(z_i)\frac{\partial}{\partial z_i} = -\frac{\partial(g-h)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Puis A_i :

$$\begin{aligned} A_i &= \left[H_{g-h}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, H_{g-h}\right] \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right]\right) \end{aligned}$$

Pour le premier terme on a :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial(g-h)}{\partial z_j}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]}_{=0} + \frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i \partial z_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Et pour le second :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial(g-h)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right] = \frac{\partial(g-h)}{\partial x_j}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right]}_{=0} + \frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial z_j}$$

Ainsi, A_i est le champ hamiltonien de la fonction $-\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i}$. On a donc :

$$\begin{aligned}[S_0, H_{h-g}] &= -\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(z_i\frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i\partial z_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - z_i\frac{\partial^2(g-h)}{\partial z_i\partial x_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(g-h)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i} \\ &= -\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\frac{\partial\left(z_i\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i}\right)}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial\left(z_i\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i}\right)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial(g-h)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\end{aligned}$$

Donc $[S_0, H_{h-g}]$ est l'hamiltonien de la fonction :

$$(g-h) - \sum_{i=1}^{n} z_i\frac{\partial(g-h)}{\partial z_i} = (g-h) - \mathcal{L}_{S_0}(g-h)$$

Ce qui prouve le lemme.

□

Soit r une fonction d'ordre supérieur ou égal à 3. On pose $h(x,z) = \sum_k \lambda_k x_k z_k$ et $g(x,z) = h(x,z) + r(x,z)$. Si on applique le lemme (6.2) pour les fonctions g et h, on obtient la fonction :

$$r - \mathcal{L}_S(r)$$

Car $(g-h) = r$ et $\{g,h\} = -\mathcal{L}_{S_\lambda}(r)$. On peut donc donner une définition plus précise des formes normales pour les équations différentielles implicites :

Définition. Un système de la forme :

$$\begin{cases} y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k z_k + r(x,z) \\ \\ \Omega = dy - \sum_{k=1}^{n} z_k dx_k = 0 \end{cases}$$

où r est une fonction d'ordre supérieur ou égal à 3, est *une forme normale* si et seulement si :

$$\mathcal{L}_S(r) = r$$

Par exemple si r est un monôme $x^I z^J := x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}$ alors c'est un monôme résonnant si :

$$(\lambda, I) + ((1-\lambda), J) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k i_k + (1-\lambda_k) j_k = 1$$

avec $|I| + |J| \geqslant 3$.

Définition. Deux systèmes implicites :

$$(E_1)\ :\ \left\{\begin{array}{l} S_1\ \ : F_1(x_1,...,x_n,y,z_1,...,z_n)=0 \\ dy-\sum_{k=1}^n z_k dx_k=0 \end{array}\right.$$

$$\text{et } (E_2)\ :\ \left\{\begin{array}{l} S_2\ \ : F_2(X_1,...,X_n,Y,Z_1,...,Z_n)=0 \\ dY-\sum_{k=1}^n Z_k dX_k=0 \end{array}\right.$$

sont dit équivalents (respectivement, formellement équivalents) s'il existe un germe de biholomorphisme (respectivement, un difféomorphisme formel) $\varphi(x_1,...,x_n,y,z_1,...,z_n)=(X_1,...,X_n,Y,Z_1,...Z_n)$ de $\mathbb{C}^{2n+1}$ qui envoie le germe de surface S_1 sur le germe de surface S_2 et qui préserve la structure de contact, c'est à dire tel que $(dY-\sum_{k=1}^n Z_k dX_k)\wedge(dy-\sum_{k=1}^n z_k dx_k)=0$. On écrira alors $E_1\sim E_2$.

Définition. Un système de la forme (20) est dit normalisable (respectivement formellement normalisable) s'il est équivalent (respectivement formellement équivalent) à une forme normale.

Et dans ce cas, avec les notations précédentes, le champ liouvillien associé à cette équation sous forme normale est : $NF=S_0+S_\lambda+H_r$ où H_r est l'hamiltonien de cette fonction r. Et ce champ est une forme normale du champ liouvillien associé au système initial.

Proposition 6.3. — *La proposition 2.2 se généralise en dimension supérieure.*

Démonstration. — La démonstration est strictement analogue à la proposition 2.2. En reprenant les mêmes notations, l'équation homogène à résoudre est $[S,H_u]=H_v$ où $S=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-(1-\lambda_i)z_i\frac{\partial}{\partial z_i}$ et H_u, H_v sont les champs hamiltoniens respectifs de polynômes homogènes u et v. On pose $h(x,z)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i z_i$ et :

$$[S,H_u]=H_{h,u}+\sum_{l=1}^n\left(\left[\sum_{k=1}^n z_k\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\partial z_l}\right]\frac{\partial}{\partial x_l}+\left[\frac{\partial u}{\partial x_l}-\sum_{k=1}^n z_k\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\partial x_l}\right]\frac{\partial}{\partial z_l}\right).$$

Donc ce champ est l'hamiltonien de la fonction :

$$\{h,u\}+\sum_{k=1}^n z_k\frac{\partial u}{\partial z_k}-u$$

Ainsi l'équation homogène associée équivaut à :

$$\mathcal{L}_S(u)-u=v$$

Donc en posant $u = \sum_{(I,J)} u_{IJ} x^I z^J$ et $v = \sum_{(I,J)} v_{IJ} x^I z^J$ on obtient :

$$((\lambda, I) + ((1-\lambda), J) - 1) u_{IJ} = v_{IJ}$$

Pour construire le difféomorphisme symplectique qui résout l'équation homogène il suffit alors de prendre :

$$u_{IJ} = \frac{v_{IJ}}{((\lambda, I) + ((1-\lambda), J) - 1)} \text{ si } ((\lambda, I) + ((1-\lambda), J) - 1) \neq 0$$
$$\text{et } u_{IJ} = 0 \text{ sinon.}$$

□

6.3. Domaine de Poincaré

Contrairement aux champs hamiltoniens, il existe bien un domaine de Poincaré pour les champs de vecteurs liouvilliens.

En effet, l'ensemble des valeurs propres d'une partie linéaire de champ hamiltonien est une famille de binôme $(\lambda, -\lambda)$, ces deux nombres complexes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à 0. Par conséquent l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs propres contient toujours 0.

Dans le cas d'un champ liouvillien, les binômes sont de la forme $(\lambda, (1-\lambda))$, or λ et $(1-\lambda)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point d'affixe $\frac{1}{2}$. Il est donc tout à fait possible d'avoir une enveloppe convexe des valeurs propres qui ne contient pas 0. Cette configuration certifie donc l'existence de champs liouvilliens dont le n-uplet des valeurs propres appartient au domaine de Poincaré.

Ainsi, dans cette section, on établit une condition sur les invariants dynamiques de l'équation implicite pour que le champ liouvillien associé soit soumis aux hypothèses du théorème de Poincaré.

Théorème 6.4. — *On considère un système* (E) *de la forme (20) :*

$$(E) \ : \ \begin{cases} y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(z_j^2 + \chi_j x_j^2) + \ldots \\ \\ \Omega = dy - \sum_{j=1}^n z_j dx_j = 0 \end{cases}$$

On pose $\chi_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ *et on définit pour tout* $\sigma \in \mathbb{R}$ *la fonction :*

$$f_\sigma \ : \ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \ \theta \mapsto \frac{(1+\sigma^2)(\cos(\theta) - \sigma\sin(\theta))}{(2\sigma\cos(\theta) + (1-\sigma^2)\sin(\theta))^2}$$

S'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $1 \leqslant j \leqslant n$ *on a* $f_\sigma(\theta_j) > \rho_j > 0$ *alors* (E) *est biholomorphiquement normalisable en une forme normale polynomiale.*

Les fonctions f_σ définissent des équations polaires de paraboles et donnent un critères d'appartenance au domaine de Poincaré. Si les invariants dynamiques χ_j sont tous contenus « à l'intérieur » d'une des paraboles définies par les fonctions f_σ (c'est-à-dire dans la composante connexe convexe de son complémentaire dans le plan), alors le champ liouvillien associé à (E) sera normalisable.

Exemple. On considère l'équation :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(z_1^2 + \frac{2}{9}x_1^2) + \frac{1}{2}(z_2^2 + x_2^2) + ... \\ \Omega = 0 \end{cases} \tag{21}$$

où ... désigne des termes d'ordres supérieurs à trois. Les invariants dynamiques sont $\chi_1 = \frac{2}{9}$ et $\chi_2 = 1$ et ce système est équivalent en zéro à :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x_1z_1 + jx_2z_2 + ... \\ \Omega = 0 \end{cases}$$

où $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$; x_1^3 est ici le seul terme résonnant. Les hypothèses du théorème (6.4) s'appliquent en choisissant $\sigma = 0$ (i.e. la parabole choisie est d'équation $x = y^2$). Ainsi l'équation (21) se normalise sous la forme :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x_1z_1 + jx_2z_2 + x_1^3 \\ \Omega = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y = \frac{1}{2}(z_1^2 + \frac{2}{9}x_1^2) + \frac{1}{2}(z_2^2 + x_2^2) + (\frac{2}{3}x_1 - z_1)^3 \\ \Omega = 0 \end{cases}$$

Plus généralement lorsque les invariants dynamiques sont des réels strictement positifs, la parabole choisie avec $\sigma = 0$ convient toujours. Ce type d'équation implicite est alors toujours normalisable.

Autre exemple. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le système :

$$\begin{cases} y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}\left(z_j^2 + \left(\frac{1}{4} + i2(j - \frac{1}{2})^2\right)x_j^2\right) + ... \\ \\ \Omega = 0 \end{cases} \tag{22}$$

où ... désigne des termes d'ordres supérieurs à trois. Les invariants dynamiques sont $\chi_j = \rho_j e^{i\theta_j} = \frac{1}{4} + i2(j - \frac{1}{2})^2$. Les valeurs propres du champ liouvillien associé sont alors $(\lambda_j, 1 - \lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ où $\lambda_j = (1 - j) + i(j - \frac{1}{2})$. Avec de telles valeurs propres il n'y a aucune résonance. En effet, il suffit de regarder leur projection sur la droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ pour voir qu'une relation $(P, \lambda) + (Q, 1 - \lambda) = 1$ n'est pas réalisable lorsque $|P| + |Q| \geqslant 3$. Sur cette droite, 1 est projeté sur l'affixe du vecteur $2\overrightarrow{u}$ et tous les λ_j sont projetés sur l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$; ainsi $(P, \lambda) + (Q, 1 - \lambda)$

est projeté sur l'affixe du vecteur $(|P|+|Q|)\cdot\overrightarrow{u}$, ce rend impossible toute relation de résonance dès que $|P|+|Q|\geqslant 3$.

Pour appliquer le théorème (6.4) on choisit $\sigma=-1$ (i.e. la parabole d'équation $y=2x^2-x$). On calcule alors $f_{-1}(\theta_j)$, sachant que $\cos(\theta_j)=\frac{1}{4\rho_j}$ et $\sin(\theta_j)=\frac{2}{\rho_j}(j-\frac{1}{2})^2$.

$$f_{-1}(\theta_j)=\frac{\frac{1}{4\rho_j}+\frac{2}{\rho_j}(j-\frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{4\rho_j})^2}=\rho_j\left(2+16\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\right)>\rho_j$$

Ainsi pour tout j, $f_{-1}(\theta_j)>\rho_j>0$ et par conséquent le système (22) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(z_j^2+\left(\frac{1}{4}+i2(j-\frac{1}{2})^2\right)x_j^2\right) \\ \\ \Omega=0 \end{array}\right.$$

Preuve du théorème 6.4. Soit X le champ liouvillien associé à (E), et soit $(\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n)$ les valeurs propres de la partie linéaire X_1 de X (que l'on suppose tous différents de $\frac{1}{2}$. Le n-uplet $(\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n)$ appartient au domaine de Poincaré s'il existe une droite D du plan, passant par 0 telle que tous les points d'affixes $\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n$ soient tous strictement contenus dans un des deux demi-plans ouverts délimités par D.

Or, si μ est une valeurs propres de X_1, alors son symétrique par rapport au point d'affixe $\frac{1}{2}$: $1-\mu$ est aussi valeur propre. Et donc tout d'abord, on écarte le cas où D est la droite horizontale d'équation $y=0$, car $\mathcal{I}m(\mu)$ et $\mathcal{I}m(1-\mu)$ sont opposés l'un de l'autre, on écrira donc $x=\sigma y$ pour l'équation de D que l'on notera désormais D_σ ; d'autre part, les points sont tous à droite de D_σ (i.e. $x>\sigma y$), car si μ était à gauche de D_σ alors $1-\mu$ serait à droite et le n-uplet des valeurs propres ne serait donc pas dans le domaine de Poincaré ; enfin, si les points sont tous à droite de D_σ alors il sont également tous à gauche de la droite $\tilde{D_\sigma}$ d'équation $x=\sigma y+1$.

Ainsi, dire que $(\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n)$ appartient au domaine de Poincaré, revient à dire que les points d'affixes $\lambda_1,...,\lambda_n,1-\lambda_1,...,1-\lambda_n$ sont contenus strictement à l'intérieur de la bande T_σ délimitée par les droites parallèles D_σ et $\tilde{D_\sigma}$.

Soit $\tilde{\chi}\ :\mathbb{C}\to\mathbb{C},z\mapsto z(1-z)$. On a donc $\tilde{\chi}(x+iy)=[y^2-x^2+x]+i[y(1-2x)]$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a $\tilde{\chi}(z)=\tilde{\chi}(1-z)$, donc $\tilde{\chi}(D_\sigma)=\tilde{\chi}(\tilde{D_\sigma})$. On se donne une paramétrisation de D_σ :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sigma t \\ y(t)=t \end{array}\right.$$

Alors $\tilde{\chi}(D_\sigma)$ est la parabole $\mathcal{P}_\sigma$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = (1-\sigma^2)t^2 + \sigma t \\ y(t) = -2\sigma t^2 + t \end{cases}$$

et dire qu'un point d'affixe z appartient à la bande ouverte T_σ revient à dire que le point d'affixe $\tilde{\chi}(z)$ appartient à "l'intérieur" de la parabole $\mathcal{P}_\sigma$.

L'équation cartésienne de $\mathcal{P}_\sigma$ est :

$$4\sigma^2x^2 + 4\sigma(1-\sigma^2)xy + (1-\sigma^2)^2y^2 - (1+\sigma^2)x + \sigma(1+\sigma^2)y = 0.$$

Et son équation polaire est :

$$\rho(\theta) = \frac{(1+\sigma^2)(\cos(\theta) - \sigma\sin(\theta))}{(2\sigma\cos(\theta) + (1-\sigma^2)\sin(\theta))^2}$$

Ainsi, le n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n, 1-\lambda_1, ..., 1-\lambda_n)$ des valeurs propres de X_1 appartient au domaine de Poincaré si et seulement si les points d'affixes $\chi_j = \lambda_j(1-\lambda_j) = \rho_j e^{i\theta_j}$ sont à l'intérieur d'une parabole $\mathcal{P}_\sigma$ pour un certain $\sigma \in \mathbb{R}$, c'est à dire s'il existe un réel σ tel que $f_\sigma(\theta_j) > \rho_j > 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$.

Sous les hypothèses du théorème 6.4, le n-uplet des valeurs propres de la partie linéaire du champs liouvillien X associé à (E) appartient bien au domaine de Poincaré.

Et donc d'après le théorème de Poincaré, le champs X se normalise holomorphiquement en une forme normale polynomiale NF.

Or d'après la proposition 6.3, X est formellement symplectiquement normalisable en une forme normale liouvillienne NF_l, mais comme dans le domaine de Poincaré il y a un nombre fini de résonances NF_l est polynomiale.

Il est possible de conjuguer NF à NF_l en utilisant un difféomorphisme de la forme $\varphi = (Id+U)$, où U est constitué uniquement de termes résonnants, ce qui implique que φ est polynomiale donc holomorphe.

Ainsi, les champs liouvilliens X et NF_l sont holomorphiquement conjugués, et donc d'après la proposition 4.3, ils sont symplectiquement conjugués. Et donc par la proposition 6.1, (E) se normalise en une forme normale polynomiale.

7. Existences de solutions

La proposition 2.1 établit l'existence de solutions sous certaines conditions sur le point initial, pour une équation implicite de la forme (7). Or, d'après la proposition 1.1, une équation différentielle implicite dont le champ liouvillien associé se linéarise, est équivalente à son équation implicite élémentaire associée. On peut donc établir l'existence de solutions locales, grâce aux différents théorèmes de linéarisation.

Il n'est pas nécessaire que le champ soit linéarisable pour obtenir des propriétés topologiques sur le système initial, en revanche dans le cas favorable de linéarisation, il est possible de transporter directement les propriétés analytiques, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^k$ du système élémentaire sur le système initial.

7.1. Cas complexe

On considère un système implicite de la forme :

$$\begin{cases} y = g(x,z) \\ dy - zdx = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On pose :

$$\chi := \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\left(1 - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\right) + 4\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(0)$$

$$\Gamma = \left\{\frac{\partial g}{\partial z} = 0\right\},\ \Delta := \pi_* \Gamma$$

où π est la projection $(x,y,z) \mapsto (x,y)$.

On définit alors Λ, l'ensemble de toutes les valeurs possibles de χ telle que le champ liouvillien associé à l'équation implicite soit holomorphiquement linéarisable (il le sera alors symplectiquement d'après la proposition 4.3). Alors d'après la proposition 2.1, on a :

Proposition 7.1. — *Si $\chi \in \Lambda$, l'équation $y = g(x, y')$, $y(x_0) = y_0$, admet 2 solutions locales si $(x_0, y_0) \notin \Delta$, et n'admet pas de solution dans le cas contraire, mais si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ il existe une courbe complexe passant par (x_0, y_0) contenant deux solutions locales qui se réunissent en ce point.*

De plus, d'après le théorème 3.1, on sait déjà que l'ensemble :

$$(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})\ \cup\ ]\frac{1}{4}, +\infty[\ \cup\ \left\{\chi \in]0, \frac{1}{4}[\ \mid \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \chi \neq \frac{q-1}{q^2}\right\}$$

est inclus dans Λ. Et d'après les théorèmes 4.1 et 4.4, on sait qu'on peut trouver d'autre valeurs de χ qui rendent le champ X_g linéarisable et qui vérifient la proposition 7.1.

7.2. Cas réel

La proposition 1.1 est toujours valable dans le cas réel analytique (voir [9]), ainsi que la proposition 4.3. Ainsi pour obtenir l'existence de solution d'une équation implicite de la forme (5), il nous faut un théorème de linéarisation du champ liouvillien associé. Dans ce cas, l'existence de solutions réelles, étudiées par [6] (pli foyer, pli noeud, pli col), permettra d'établir l'existence de solution de l'équation implicite.

Linéarisation $\mathcal{C}^\infty$. Lorsqu'il n'y a pas de résonance, pour linéariser le champ X en classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut utiliser le théorème de Sternberg suivant :

Théorème (Sternberg : [13]). — *Soit X un champ de vecteur réel de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de la partie linéaires de X. On suppose que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathcal{R}e(\lambda_i) \neq 0$ et :*

$$\lambda_i \neq \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k, \ \textit{pour tout } (m_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} m_k > 1$$

Alors X est linéarisable par un changement de coordonnées $\mathcal{C}^\infty$.

Sous les hypothèses du théorème de Sternberg, l'équation implicite (5) est localement équivalente à l'équation élémentaire (7) et par conséquent les propriétés d'existence de solutions locales seront les mêmes.

Linéarisation $\mathcal{C}^k$. Lorsqu'il n'y a pas de résonance d'ordre en dessous d'un certain degré $N \in \mathbb{N}^*$, on utilise un théorème de linéarisation de Sternberg en classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème (Sternberg : [12]). — *Soit X un champ de vecteur réel de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de la partie linéaires de X. On suppose que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathcal{R}e(\lambda_i) \neq 0$ et :*

$$\lambda_i \neq \sum_{k=1}^{n} m_k \lambda_k, \ \textit{pour tout } (m_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{N}, \ 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant N$$

Alors X est linéarisable par un changement de coordonnées $\mathcal{C}^k$, où :

$$k > \frac{\max |\mathcal{R}e(\lambda_i)|}{\min |\mathcal{R}e(\lambda_i)|}$$

Ce théorème donnera une équivalence des équations implicites (5) et (7) en classe $\mathcal{C}^k$. Par conséquent les solutions existantes de l'équation (7) seront envoyées sur des solutions de classe $\mathcal{C}^k$ de l'équation (5).

Tout ceci nous permet alors d'établir le corollaire suivant :

Corollaire 7.2. — *On considère le système implicite $y = g(x, z)$, $dy - zdx = 0$ et on pose :*

$$\chi := \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\left(1 - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(0)\right) + 4\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(0).$$

Alors :

I. *Si $\chi > \frac{1}{4}$, la dynamique du système est de type pli-foyer et les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

II. *Si $\chi \in]0, \frac{1}{4}[$, alors la dynamique du système est de type pli-noeud et :*

- ***a)*** *Si $\forall q > 2, \chi \neq \frac{q-1}{q^2}$ alors les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
- ***b)*** *S'il existe un entier q tel que $\chi = \frac{q-1}{q^2}$ alors, si $q > 3$ les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^2$.*

III. *Si $\chi < 0$, alors la dynamique du système est de type pli-col et :*

- ***a)*** *Si pour tout entiers p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, on a $\chi \neq \frac{p(q-p)}{q^2}$ alors les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
- ***b)*** *S'il existe p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, et tels que $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$, alors les solutions locales au voisinage des points où elles existent sont de classe $\mathcal{C}^2$.*

Démonstration. — Pour obtenir l'équivalence locale entre l'équation implicite
$(E) : y = g(x, y')$ et son équation élémentaire, il nous faut utiliser un des théorèmes de Sternberg pour linéariser le champ liouvillien associé, puis utiliser les propositions 4.3 [5] et 1.1 [9] dans le cas réel.

L'hypothèse d'hyperbolicité des théorèmes de Sternberg est équivalente à $\chi \neq 0$ dans le cas réel. Et dans chacun des cas suivants, la régularité de la transformation donne celle des solutions locales lorsque celles-ci existent.

L'étude des résonances a montré que si $\chi > \frac{1}{4}$, il n'y a aucune résonance, donc d'après le théorème de Sternberg le champ liouvillien associé à (E) est linéarisable par une transformation de classe $\mathcal{C}^\infty$. La dynamique du système est donc de même nature que l'équation (7) pour $\chi > \frac{1}{4}$, et est donc de type pli-foyer (voir [6]).

Si $\chi \in]0, \frac{1}{4}[$ et que $\forall q > 2, \chi \neq \frac{q-1}{q^2}$, le premier des deux théorèmes de Sterberg fournit alors une linéarisation $\mathcal{C}^\infty$ du champ, tandis que s'il existe un entier q tel que $\chi = \frac{q-1}{q^2}$, on utilisera le deuxième théorème de Sternberg. Dans le cas présent, la seule résonance possible est d'ordre $q-1$.

Il est donc nécessaire de prendre $q > 3$ pour obtenir les conditions de non-résonance jusqu'à l'ordre $q - 2 \geqslant 2$. La transformation linéarisante fournie par le théorème est alors au minimum de classe $\mathcal{C}^2$, ainsi que les solutions locales. Dans tous les cas la dynamique est de type pli-noeud.

Si $\chi < 0$, alors dans le cas où on a $\chi \neq \frac{p(q-p)}{q^2}$ pour tous entiers p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, on utlisera le premier des deux théorèmes, qui donne alors une linéarisation $\mathcal{C}^\infty$ du champ. Si par contre il existe p et q tels que $p > q > 0$ ou $p < 0 < q$, et tels que $\chi = \frac{p(q-p)}{q^2}$, on utlisera le théorème de Sternberg en différentiabilité finie. Les résonances sont d'ordre $1 + k(2p - q), k \in \mathbb{N}^*$, et le seul cas où $1 + k(2p - q) = 2$ équivaut à $k = p = q = 1$ et ce cas est déjà écarté par hypothèse. Dans tous les cas la dynamique est de type pli-col. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, "Mir", Moscow, 1980, Translated from the Russian by Djilali Embarek, 324 pages.

[2] A. D. Brjuno, « Analytic form of differential equations. I, II », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **25** (1971), p. 119-262 ; ibid. 26 (1972), 199-239.

[3] M. Chaperon, « Quelques outils de la théorie des actions différentiables », *Astérisque* **107** (1983), p. 259-275, Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982).

[4] ———, « Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques », *Astérisque* (1986), n° 138-139, p. 440.

[5] ———, « A remark on Liouville vector fields and a theorem of Manouchehri », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), n° 4, p. 895-899.

[6] L. Dara, « Singularités génériques des équations différentielles multiformes », *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **6** (1975), n° 2, p. 95-128.

[7] A. A. Davydov, « The normal form of a differential equation, that is not solved with respect to the derivative, in the neighborhood of its singular point », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **19** (1985), n° 2, p. 1-10, 96.

[8] I. Ekeland, « Discussion personnelle », Novembre 2012.

[9] M. Manouchehri, « Formes normales d'équations différentielles implicites et de champs de Liouville », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **16** (1996), n° 4, p. 779-789.

[10] J. Martinet & J.-P. Ramis, « Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), n° 4, p. 571-621 (1984).

[11] C. L. Siegel, « Iteration of analytic functions », *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 607-612.

[12] S. Sternberg, « Local contractions and a theorem of Poincaré », *Amer. J. Math.* **79** (1957), p. 809-824.

[13] ———, « On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space. II. », *Amer. J. Math.* **80** (1958), p. 623-631.

[14] L. Stolovitch, « Normal form of holomorphic dynamical systems ».

[15] ———, « Classification analytique de champs de vecteurs 1-résonnants de $(\mathbf{C}^n, 0)$ », *Asymptotic Anal.* **12** (1996), n° 2, p. 91-143.

[16] F. Takens, « Singularities of vector fields », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), n° 43, p. 47-100.

[17] R. Thom, « Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières », *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **3** (1972), n° 1, p. 1-11.

[18] J. Vey, « Algèbres commutatives de champs de vecteurs isochores », *Bull. Soc. Math. France* **107** (1979), n° 4, p. 423-432.

Manuscrit reçu le 5 mars 2013,
révisé le 2 septembre 2013,
accepté le 29 septembre 2013.

Julien AUROUET
Laboratoire J. A. Dieudonné,
Université de Nice - Sophia Antipolis,
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02,
France
jaurouet@unice.fr